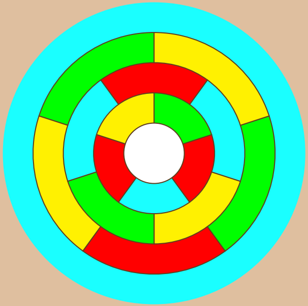
Le Théorème des Quatre Couleurs

Romain ATTAL



Fondation Arts et Métiers
(Liancourt, 26 octobre 2019)

1 : Préliminaires (1852 - 1890)

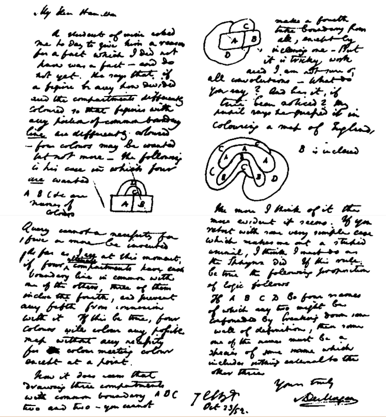
2 : Résolution (1890 - 1976)

3 : Suite ... (1976 -)

1 : Préliminaires

Augustus De Morgan

Lettre à William Hamilton (23 octobre 1852)



My dear Hamilton

A student of mine asked me to day to give him a reason for a fact which I did not know was a fact — and do not yet. He says that if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured — four colours may be wanted but not more — the following is his case in which four are wanted

A B C D are names of colours

Query cannot a necessity for five or more be invented. As far as I see at this moment, if four ultimate compartments have each boundary line in common with one of the others, three of them inclose the fourth, and prevent any fifth from connexion with it. If this be true, four colours will colour any possible map without any necessity for colour meeting colour except at a point.

Now it does seem that drawing three compartments with common boundary A B C two and two — you cannot make a fourth take boundary from all, except by inclosing one — But it is tricky work and I am not sure of all convolutions — What do you say? And has it, if true, been noticed? My pupil says he guessed it in colouring a map of England.

B is inclosed

The more I think of it the more evident it seems. If you retort with some very simple case which makes me out a stupid animal, I think I must do as the Sphynx did. If this rule be true the following proposition of logic follows

If A B C D be four names of which any two might be confounded by breaking down some wall of definition, then some one of the names must be a species of some name which includes nothing external to the other three.

Yours truly

A De Morgan

7 CSt
Oct 23/52

Francis et Frederick Guthrie

Une note de Frederick Guthrie

Publiée dans *Athenaeum*, juin 1854

> *Tinting Maps.*—In tinting maps, it is desirable for the sake of distinctness to use as few colours as possible, and at the same time no two conterminous divisions ought to be tinted the same. Now, I have found by experience that *four* colours are necessary and sufficient for this purpose,—but I cannot prove that this is the case, unless the whole number of divisions does not exceed five. I should like to see (or know where I can find) a general proof of this apparently simple proposition, which I am surprised never to have met with in any mathematical work. F. G.

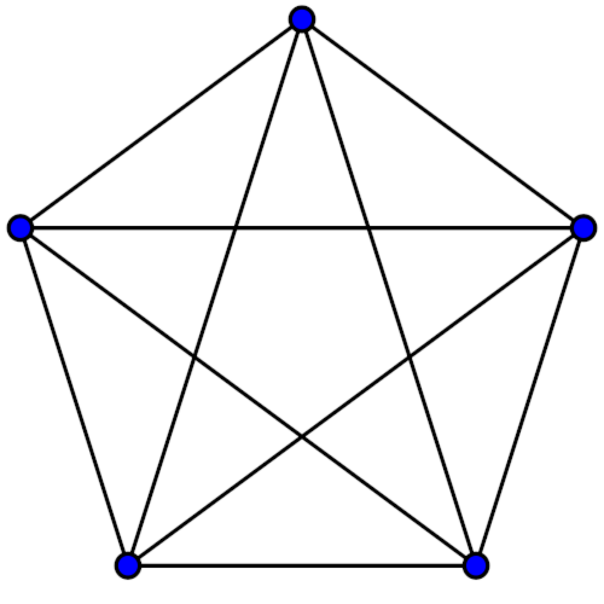
Toute carte planaire est-elle 4-coloriable ?

Le problème des cinq princes

August Möbius ($\sim$ 1840)

Peut-on diviser un pays en cinq parties adjacentes ?

K_5 est-il planaire ?



NON : K_5 n'est pas planaire !

1. K_5 planaire $\Rightarrow$ T4C faux

NON : K_5 n'est pas planaire !

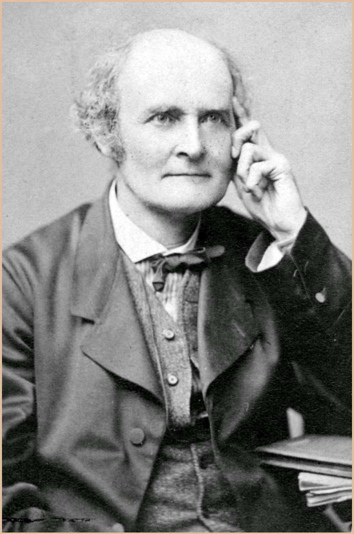
1. K_5 planaire $\Rightarrow$ T4C faux
2. T4C vrai $\Rightarrow$ K_5 non planaire

NON : K_5 n'est pas planaire !

1. K_5 planaire $\Rightarrow$ T4C faux
2. T4C vrai $\Rightarrow$ K_5 non planaire
3. K_5 non planaire $\not\Rightarrow$ T4C vrai

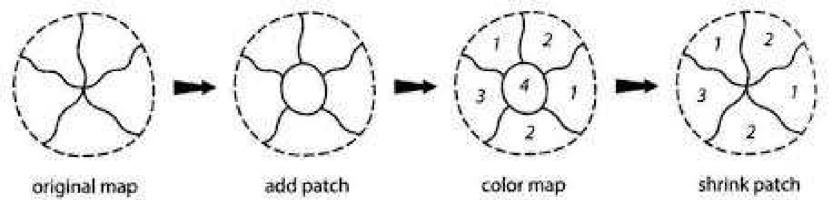
1878 : Arthur Cayley relance le problème

et demande à la *London Mathematical Society* **s'il a été résolu.**

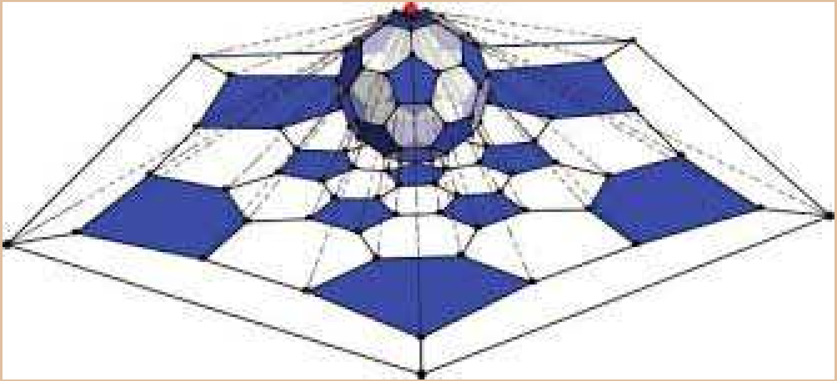


1879 : Arthur Cayley simplifie le problème

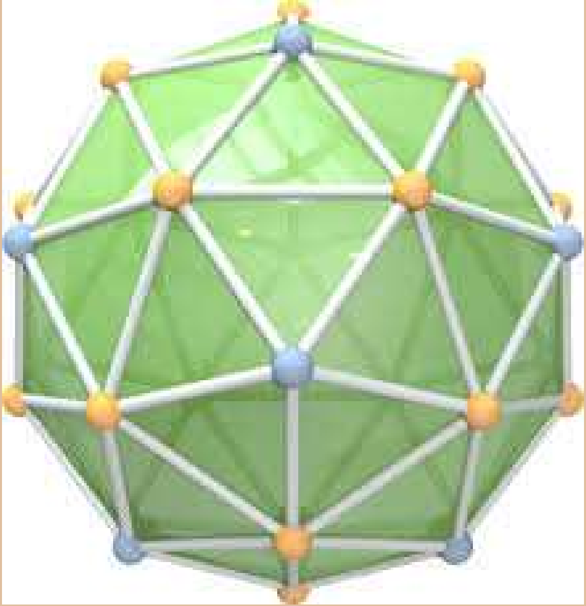
On peut supposer que les sommets sont de degré 3



Projection stéréographique

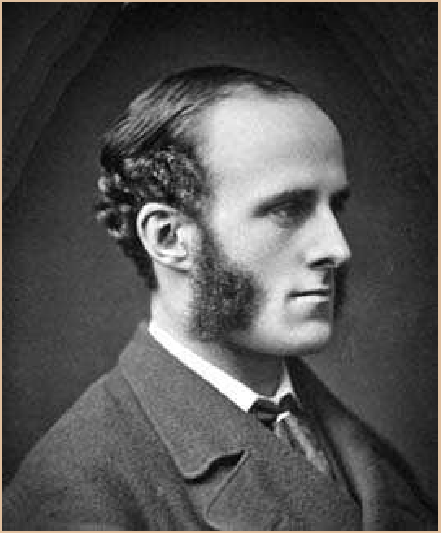


Triangulation duale



1879 : Alfred Kempe « prouve » le T4C

On the geographical problem of the four colours, **American Journal of Mathematics**



La relation d'Euler pour les polyèdres sphériques

$$S - A + F = 2$$

La relation d'Euler pour les polyèdres sphériques

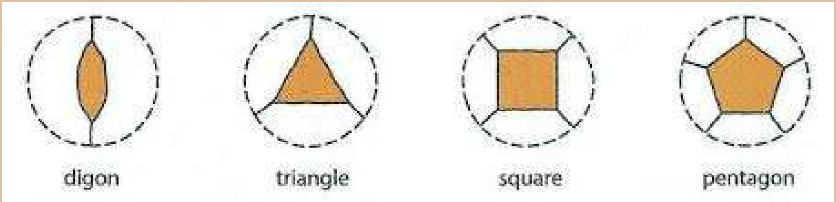
Une formule équivalente pour les cartes cubiques

$$d_x = \text{nombre de côtés de la face } x$$

$$\sum_x (6 - d_x) = 12$$

Ensembles inévitables

D'après la relation d'Euler, toute carte planaire doit contenir au moins un digone ou un triangle ou un carré ou un pentagone, **seules faces pour lesquelles** $6 - d > 0$.



Preuve par récurrence sur le nombre de faces

1. Supposons que tous les polyèdres ayant moins de N faces sont 4-coloriables.

Preuve par récurrence sur le nombre de faces

1. Supposons que tous les polyèdres ayant moins de N faces sont 4-coloriables.
2. Prenons un polyèdre quelconque à N faces.

Preuve par récurrence sur le nombre de faces

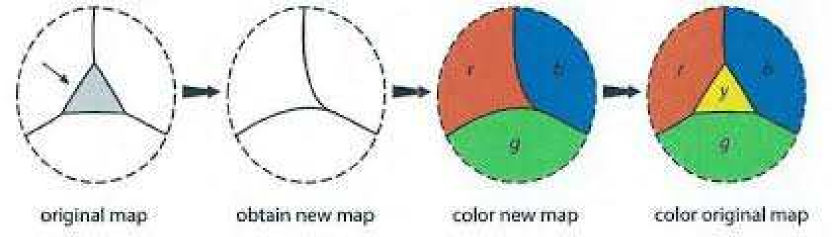
1. Supposons que tous les polyèdres ayant moins de N faces sont 4-coloriables.
2. Prenons un polyèdre quelconque à N faces.
3. Il possède alors une face de degré $d < 6$.

Preuve par récurrence sur le nombre de faces

1. Supposons que tous les polyèdres ayant moins de N faces sont 4-coloriables.
2. Prenons un polyèdre quelconque à N faces.
3. Il possède alors une face de degré $d < 6$.
4. Si $d = 2$ on efface une arête du digone, on colorie le polyèdre résultant, on remet l'arête effacée et on colorie le digone avec une des deux couleurs libres.

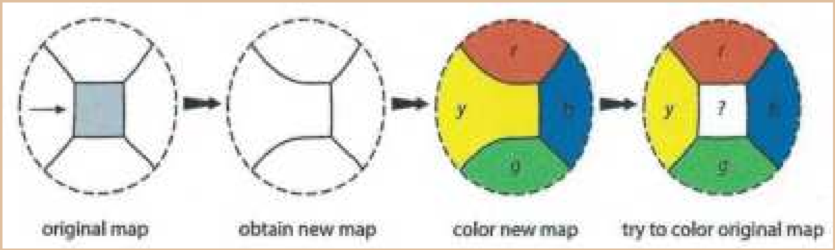
Preuve par récurrence sur le nombre de faces

Si $d = 3$, c'est encore facile.



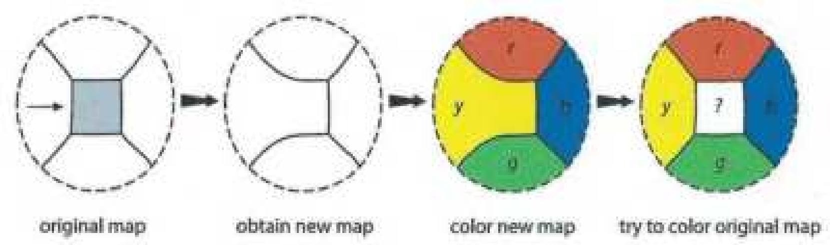
Preuve par récurrence sur le nombre de faces

1. Si $d = 4$, on efface une arête du carré, on colorie le polyèdre résultant puis on remet l'arête effacée.



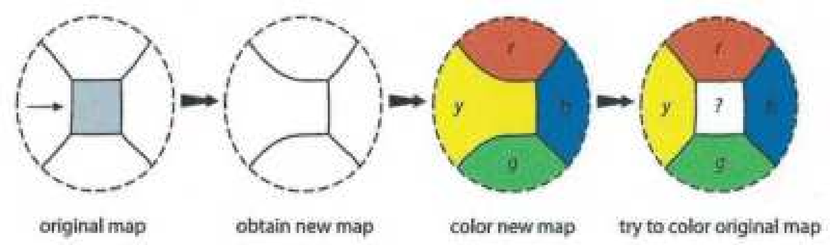
Preuve par récurrence sur le nombre de faces

1. Si $d = 4$, on efface une arête du carré, on colorie le polyèdre résultant puis on remet l'arête effacée.
2. Si une couleur est libre, on l'attribue au carré.



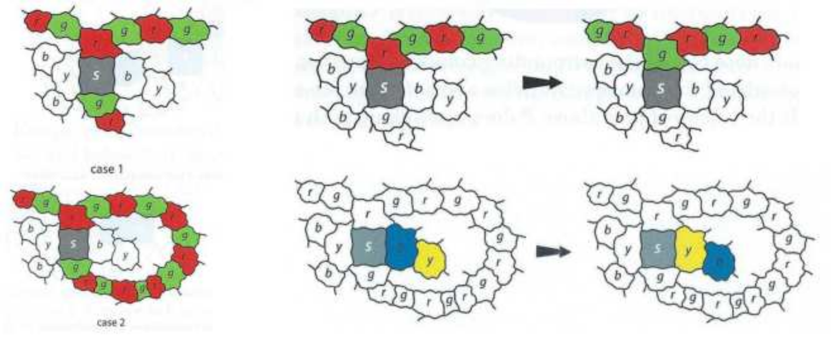
Preuve par récurrence sur le nombre de faces

1. Si $d = 4$, on efface une arête du carré, on colorie le polyèdre résultant puis on remet l'arête effacée.
2. Si une couleur est libre, on l'attribue au carré.
3. Sinon, on échange les couleurs a et b le long d'une **chaîne de Kempe** $ababab\cdots$



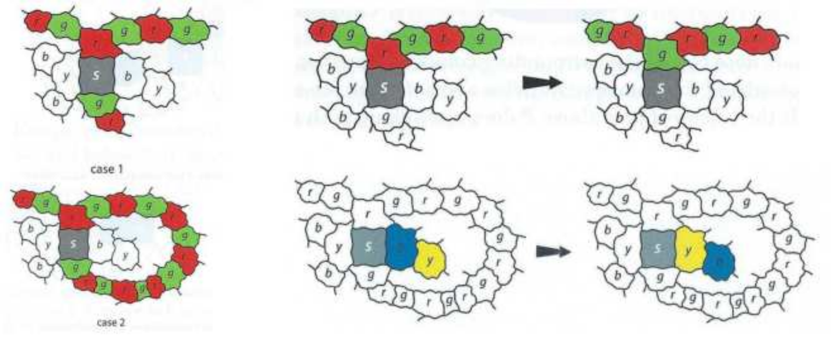
La méthode des chaînes de Kempe

1. Un carré est entouré de 4 couleurs distinctes.



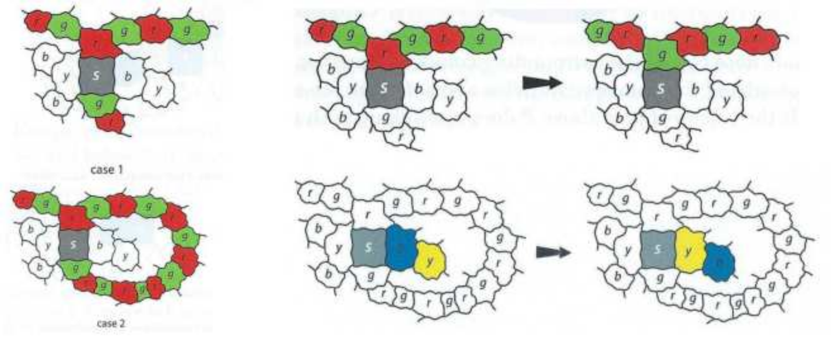
La méthode des chaînes de Kempe

1. Un carré est entouré de 4 couleurs distinctes.
2. Une chaîne de Kempe **rouge**/**vert** peut soit (1) joindre deux faces opposées adjacentes à ce carré, soit (2) ne pas les joindre.



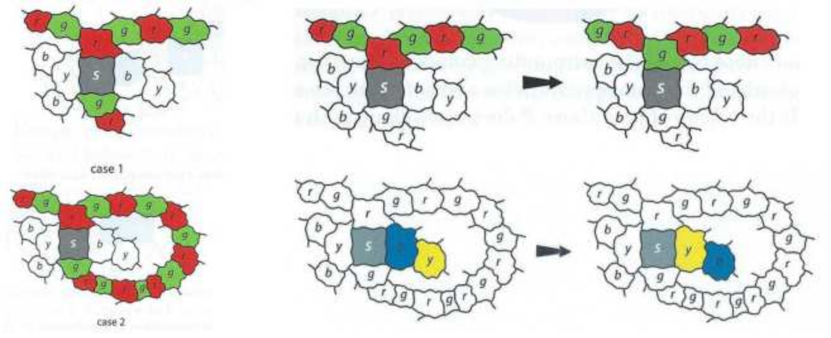
La méthode des chaînes de Kempe

Si elle ne les joint pas, échanger **rouge** et **vert** le long de cette chaîne libère une couleur disponible pour le carré.



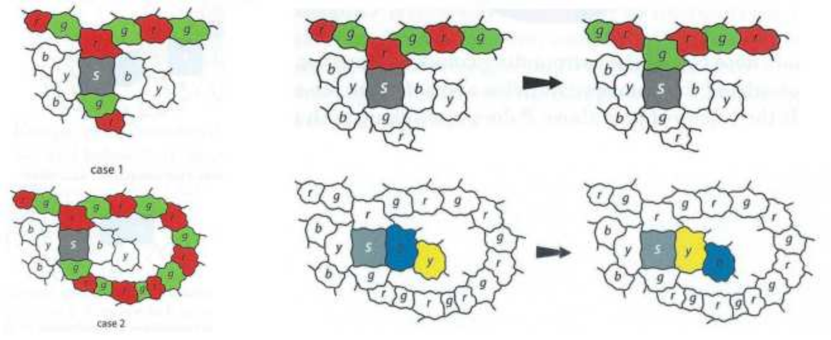
La méthode des chaînes de Kempe

Si cette chaîne **rouge vert** joint deux faces opposées du carré, il existe une chaîne de Kempe **bleu**/**jaune** qui ne joint pas les deux autres faces, d'après le **Théorème de Jordan**.



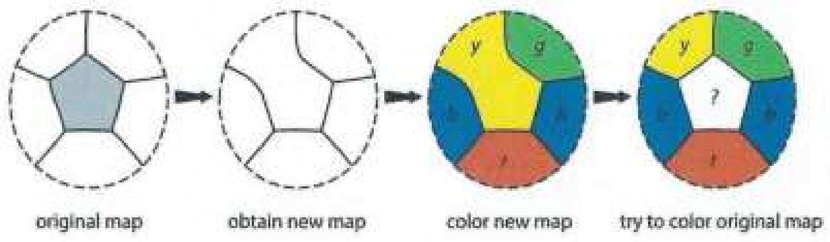
La méthode des chaînes de Kempe

Echanger **bleu** et **jaune** sur cette chaîne libère une couleur pour le carré.



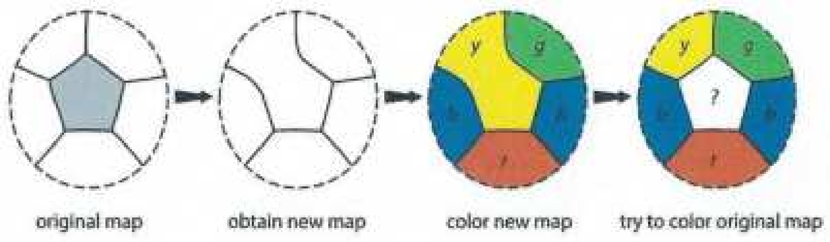
Les limites de la méthode de Kempe

1. Si $d = 5$, on efface une arête du pentagone, on colorie le polyèdre résultant puis on remet l'arête effacée.



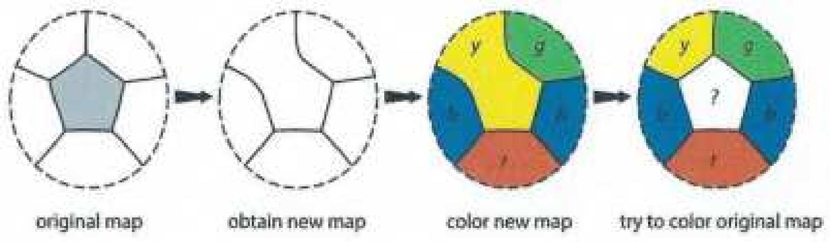
Les limites de la méthode de Kempe

1. Si $d = 5$, on efface une arête du pentagone, on colorie le polyèdre résultant puis on remet l'arête effacée.
2. Si une couleur est libre, on l'attribue au pentagone.



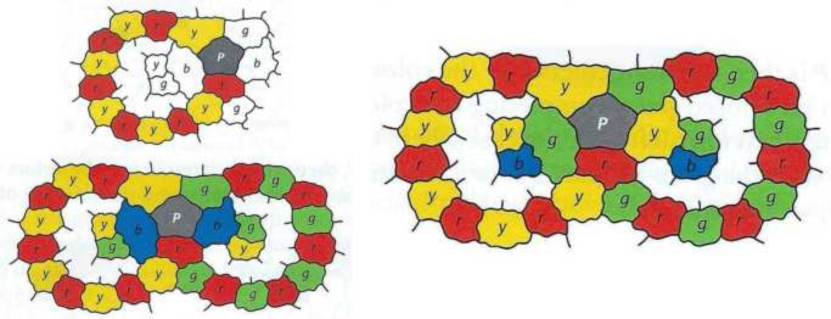
Les limites de la méthode de Kempe

1. Si $d = 5$, on efface une arête du pentagone, on colorie le polyèdre résultant puis on remet l'arête effacée.
2. Si une couleur est libre, on l'attribue au pentagone.
3. Sinon, on applique la méthode de Kempe **avec deux chaînes différentes**.



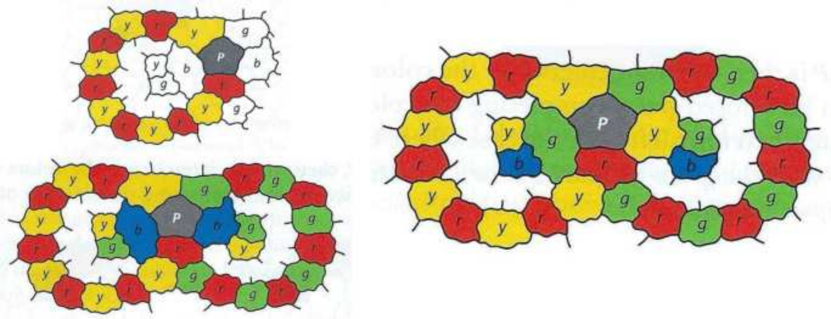
Peut-on utiliser deux chaînes de Kempe ?

Si aucune couleur n'est disponible pour le pentagone, alors une seule couleur, disons **bleu**, apparaît deux fois autour de lui.



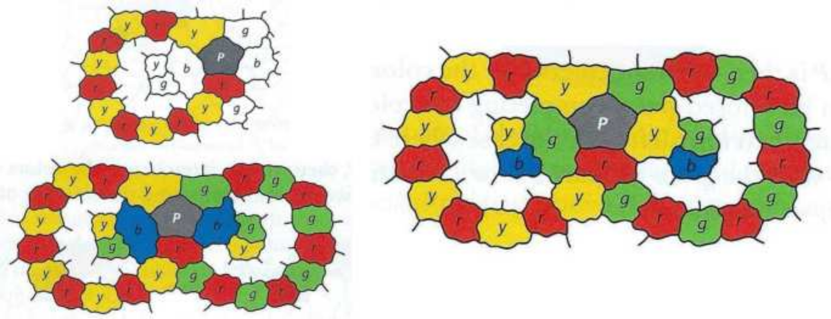
Peut-on utiliser deux chaînes de Kempe ?

Les trois couleurs restantes forment des chaînes de Kempe, disons **rouge**/**jaune** et **rouge**/**vert**.



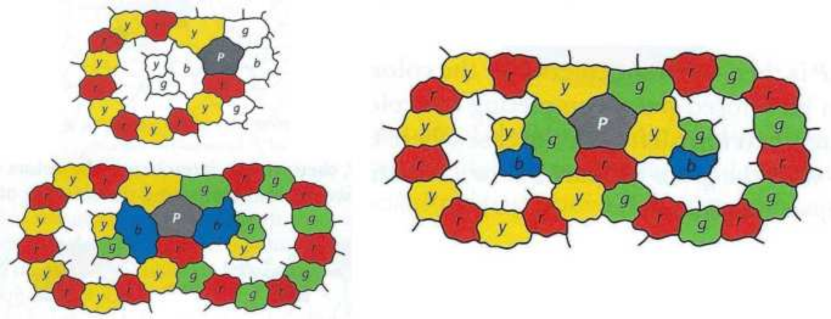
Peut-on utiliser deux chaînes de Kempe ?

Si une de ces chaînes de Kempe, complétée par le pentagone, n'encercle aucune des deux faces **bleues** adjacentes, échanger ses couleurs en libère une pour ce pentagone.



Peut-on utiliser deux chaînes de Kempe ?

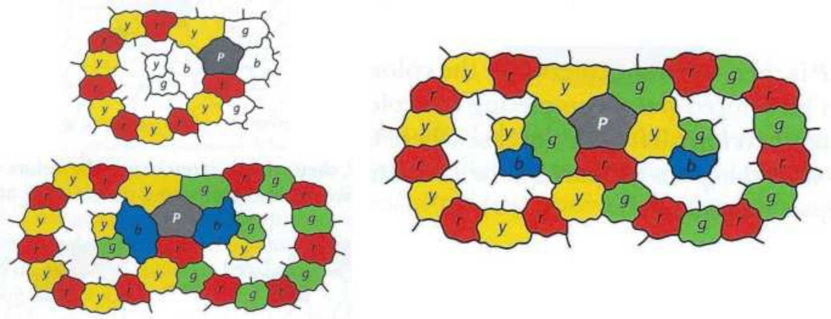
Si chacune de ces chaînes encercle une des deux faces **bleues**, alors on peut échanger **bleu** et **vert** à l'intérieur de la chaîne **rouge**/**jaune** et échanger **bleu** et **jaune** à l'intérieur de la chaîne **rouge**/**vert** et colorier le pentagone en **bleu**.



Peut-on utiliser deux chaînes de Kempe ?

On a alors libéré le **bleu** pour le pentagone et la carte complète est coloriable.

CQFD !

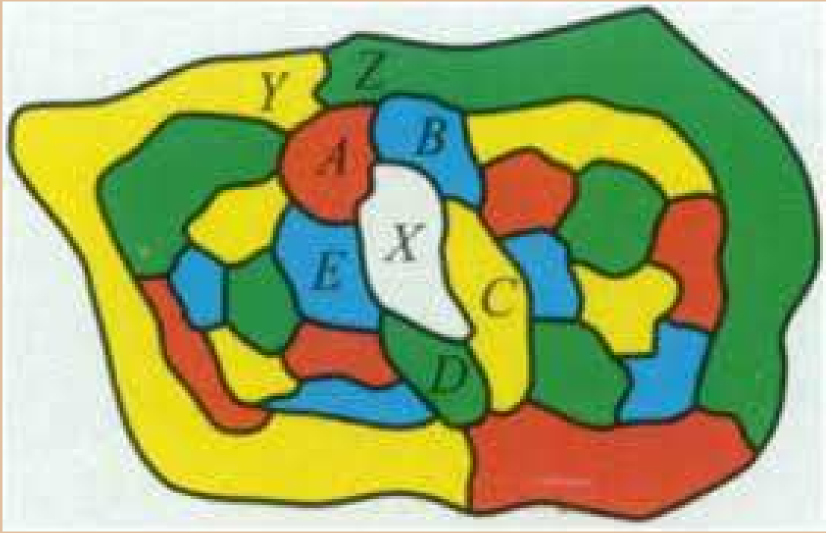


1890 : Percy Heawood détecte une erreur

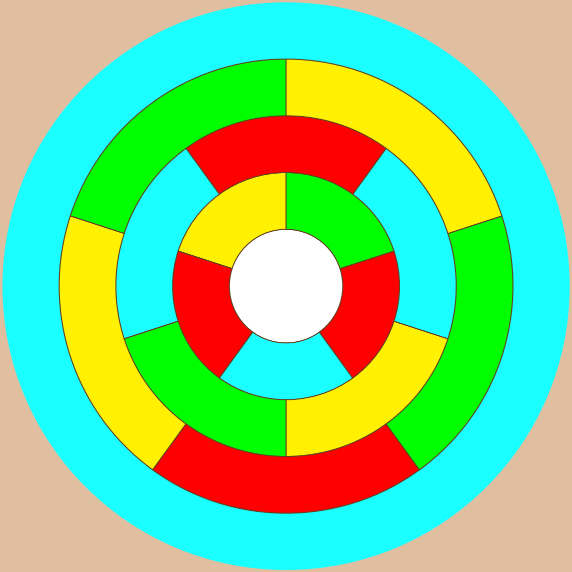
Si les deux chaînes de Kempe se touchent, on crée deux pays contigus de même couleur !

Mais il parvient à sauver la méthode de Kempe en prouvant le Théorème des 5 Couleurs.

1890 : Percy Heawood détecte une erreur



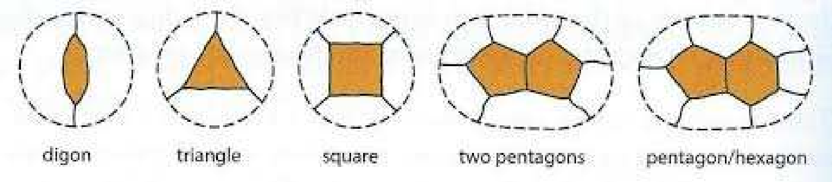
1921 : un contre-exemple dû à Alfred Errera



2 : Résolution

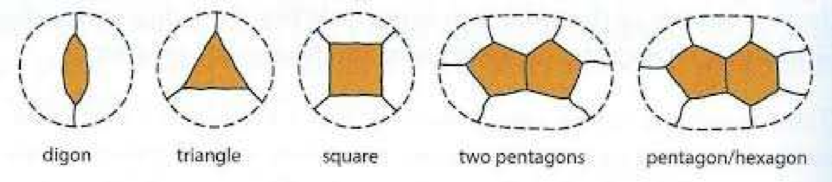
Affiner les ensembles inévitables

1. En 1904, Paul Wernicke introduit la **méthode de décharge**.



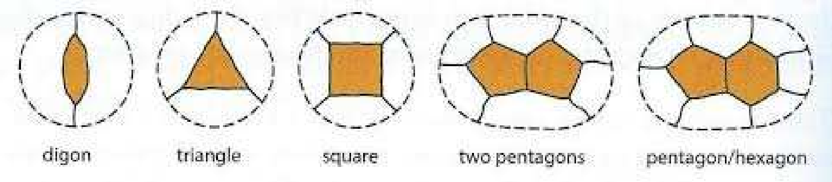
Affiner les ensembles inévitables

1. En 1904, Paul Wernicke introduit la **méthode de décharge**.
2. On répartit la courbure des pentagones sur les cinq faces voisines.



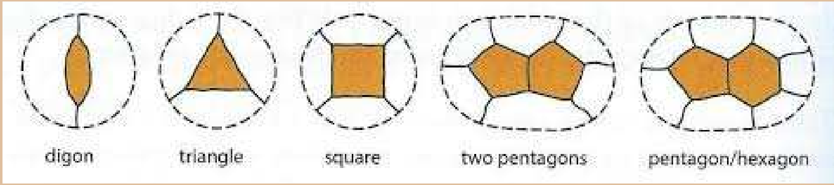
Affiner les ensembles inévitables

1. En 1904, Paul Wernicke introduit la **méthode de décharge**.
2. On répartit la courbure des pentagones sur les cinq faces voisines.
3. Chaque face voisine d'un pentagone en reçoit une charge $\frac{1}{5}$.

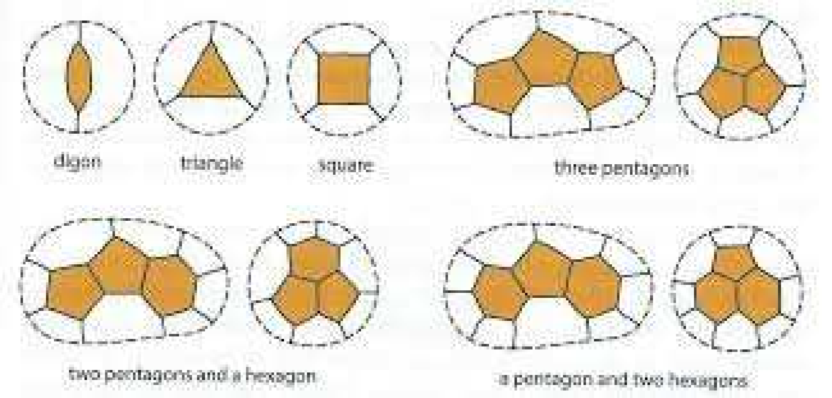


Affiner les ensembles inévitables

1. En 1904, Paul Wernicke introduit la **méthode de décharge**.
2. On répartit la courbure des pentagones sur les cinq faces voisines.
3. Chaque face voisine d'un pentagone en reçoit une charge $\frac{1}{5}$.
4. $\rightarrow \{2, 3, 4, 5 \cdot 5, 5 \cdot 6\} =$ ensemble inévitable.



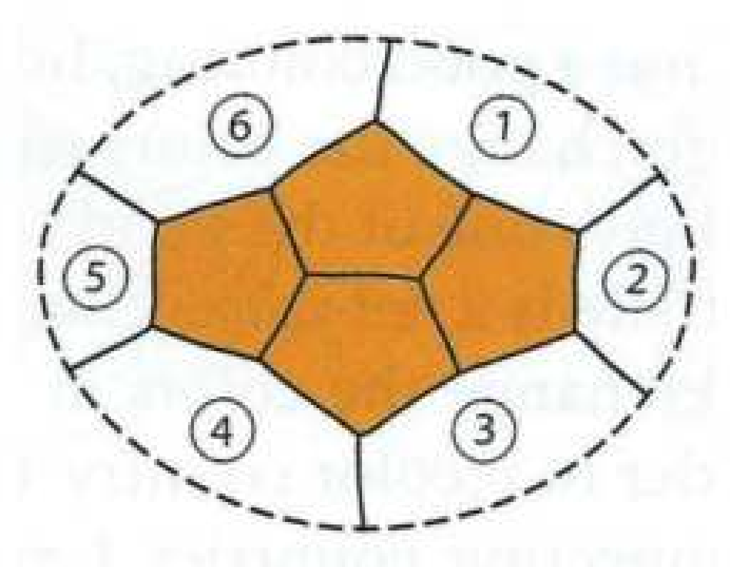
Affiner la liste des configurations inévitables



Philip Franklin (1922)

Configurations réductibles

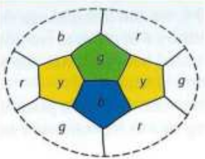
Le diamant de Birkhoff (1913)



Configurations réductibles

Le diamant de Birkhoff (1913)

rgrgrg	*rgrbrg**	*rgrbgy**	*rgbrgy*	*rgbryb*	*rgbgbg**	*rgbyrg*	*rgbygy**
*rgrgrb**	*rgrbrb*	*rgrbyg**	*rgbrbg**	*rgbgrg**	*rgbgby*	*rgbyrb*	*rgbybg**
rgrgbg	*rgrbry*	*rgrbyb**	*rgbrby*	*rgbgrb**	*rgbgyg*	*rgbyry**	*rgbyby**
*rgrgby**	*rgrbgb**	*rgbrgb*	*rgbryg*	*rgbgry**	*rgbgyb*	*rgbygb*	



rgrgrb s'étend directement aux cinq pentagones du diamant de Birkhoff. Certains coloriages nécessitent des échanges de couleurs sur des chaînes de Kempe.

Peut-on trouver une liste <u>finie</u> de configurations inévitables et réductibles ?

Affiner la méthode de décharge

Heinrich Heesch, 1969

Affiner la méthode de décharge

Heinrich Heesch, 1969

1. Il remplace la courbure, $1 - \frac{d_x}{6}$, par une fonction $q(x)$ telle que $\sum_x q(x) = 2$.

Affiner la méthode de décharge

Heinrich Heesch, 1969

1. Il remplace la courbure, $1 - \frac{d_x}{6}$, par une fonction $q(x)$ telle que $\sum_x q(x) = 2$.
2. Il obtient ainsi des ensembles inévitables de plus en plus fins.

Affiner la méthode de décharge

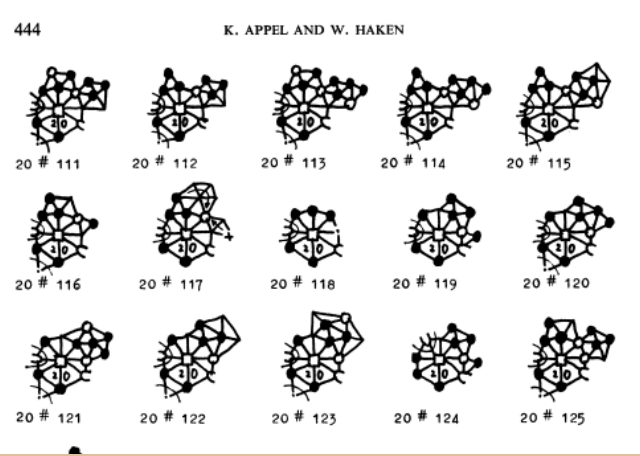
Heinrich Heesch, 1969

1. Il remplace la courbure, $1 - \frac{d_x}{6}$, par une fonction $q(x)$ telle que $\sum_x q(x) = 2$.
2. Il obtient ainsi des ensembles inévitables de plus en plus fins.
3. Il conjecture l'existence d'un ensemble inévitable d'environ 10000 configurations réductibles ceinturées par moins de 15 faces.

Kenneth Appel et Wolfgang Haken (1976)

Kenneth Appel et Wolfgang Haken (1976)

Ils trouvent une liste de 1936 configurations inévitables, *probablement* réductibles, dont ils testent la réductibilité sur un ordinateur.



Et l'ordinateur leur répond ...

OUI, toutes ces configurations sont réductibles, donc toute carte planaire est 4-coloriable.

CQFD !

3 : Suite ...

Est-ce une *vraie preuve* ?

1. Premier théorème prouvé uniquement *in silico*.

Est-ce une *vraie preuve* ?

1. Premier théorème prouvé uniquement *in silico*.
2. En 1998, la preuve a été simplifiée par Robertson, Sanders, Seymour et Thomas (622 configurations inévitables et réductibles).

Est-ce une *vraie preuve* ?

1. Premier théorème prouvé uniquement *in silico*.
2. En 1998, la preuve a été simplifiée par Robertson, Sanders, Seymour et Thomas (622 configurations inévitables et réductibles).
3. L'algorithme a été vérifié par Georges Gonthier et Benjamin Werner en 2005.

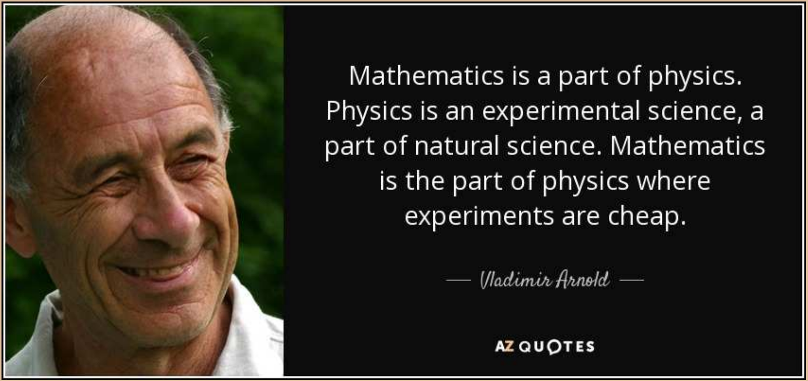
Est-ce une *vraie preuve* **?**

1. Premier théorème prouvé uniquement *in silico*.
2. En 1998, la preuve a été simplifiée par Robertson, Sanders, Seymour et Thomas (622 configurations inévitables et réductibles).
3. L'algorithme a été vérifié par Georges Gonthier et Benjamin Werner en 2005.
4. En octobre 2019, aucune preuve humaine n'est connue et reconnue comme valide.

Un mathématicien est un savant ésotérique et contemplatif.

(Pythagore)

Intermède épistémologique



Intermède épistémologique

1. L'activité mathématique est une neuroscience auto-expérimentale.

Intermède épistémologique

1. L'activité mathématique est une neuroscience auto-expérimentale.
2. **L'objet étudié est aussi le sujet étudiant : le cerveau humain**.

Intermède épistémologique

1. L'activité mathématique est une neuroscience auto-expérimentale.
2. **L'objet étudié est aussi le sujet étudiant : le cerveau humain**.
3. On teste la cohérence de représentations mentales : les idéalités mathématiques.

Intermède épistémologique

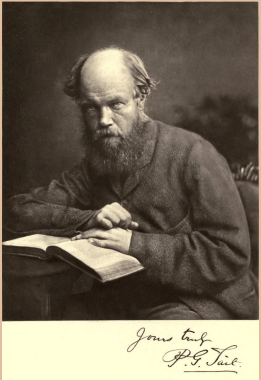
1. L'activité mathématique est une neuroscience auto-expérimentale.
2. **L'objet étudié est aussi le sujet étudiant : le cerveau humain**.
3. On teste la cohérence de représentations mentales : les idéalités mathématiques.
4. Le cerveau est collectif : on pense à plusieurs.

Intermède épistémologique

1. L'activité mathématique est une neuroscience auto-expérimentale.
2. **L'objet étudié est aussi le sujet étudiant : le cerveau humain**.
3. On teste la cohérence de représentations mentales : les idéalités mathématiques.
4. Le cerveau est collectif : on pense à plusieurs.
5. Il peut aussi être aidé par une machine.

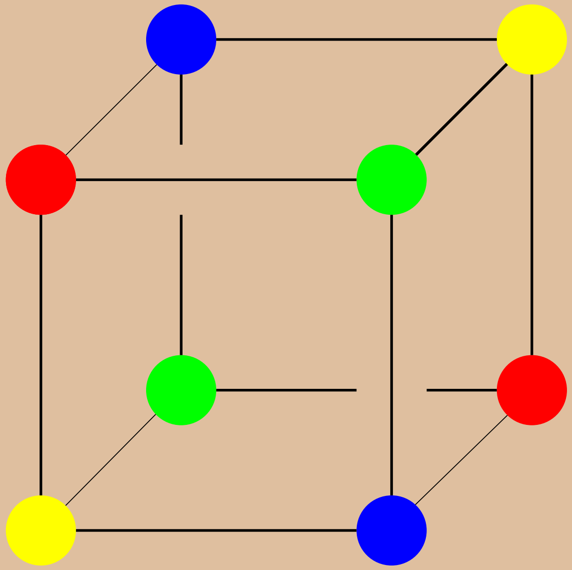
Compter les coloriages

Un lemme de Peter Tait (1880)



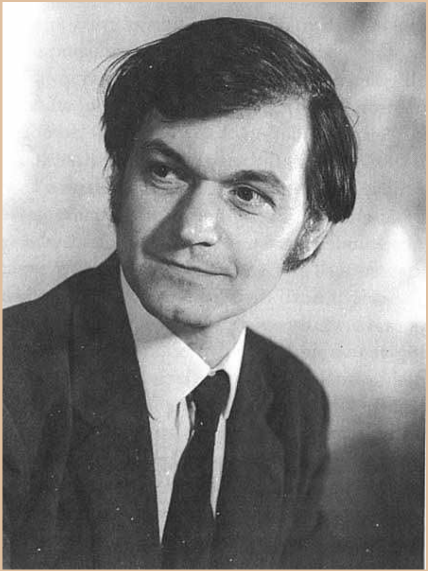
Colorier les pays avec quatre couleurs revient à marquer les frontières avec x, y ou z, tout en ayant ces trois lettres à chaque sommet.

Compter les coloriages



Compter les coloriages

Roger Penrose et la gravitation quantique

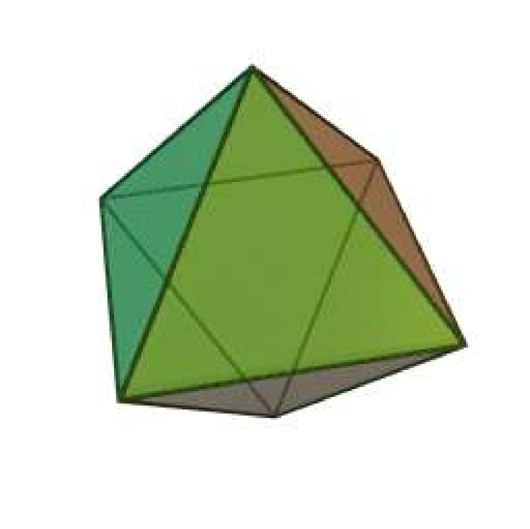


Compter les coloriages

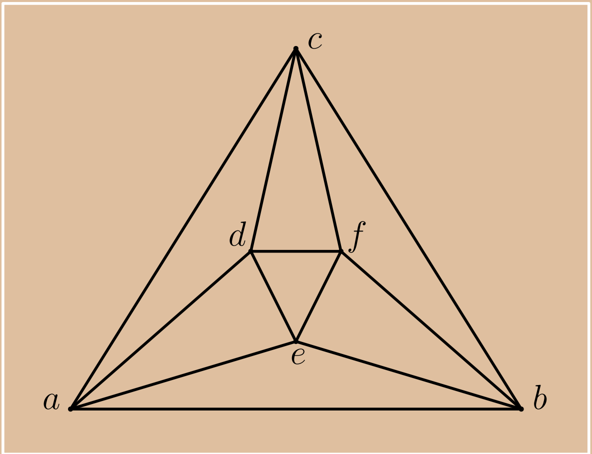
La formule de comptage de Roger Penrose (1971)

$$K = \sum_{u} \prod_{abc} \mathbf{i} \det(u_{ab}, u_{bc}, u_{ca})$$

Compter les coloriages d’un octaèdre



Compter les coloriages d'un octaèdre



$$(ab) \to (aeb) \to (adeb) \to (adefb) \to (adfb)$$
$$\to (adcfb) \to (acfb) \to (acb) \to (ab)$$

Compter les coloriages avec une logique linéaire

$$
\begin{array}{rcl}
x & \mapsto & yz + zy \\
y & \mapsto & zx + xz \\
z & \mapsto & xy + yx \\
xy\,,\, yx & \mapsto & z \\
yz\,,\, zy & \mapsto & x \\
zx\,,\, xz & \mapsto & y \\
xx\,,\, yy\,,\, zz & \mapsto & 0
\end{array}
$$

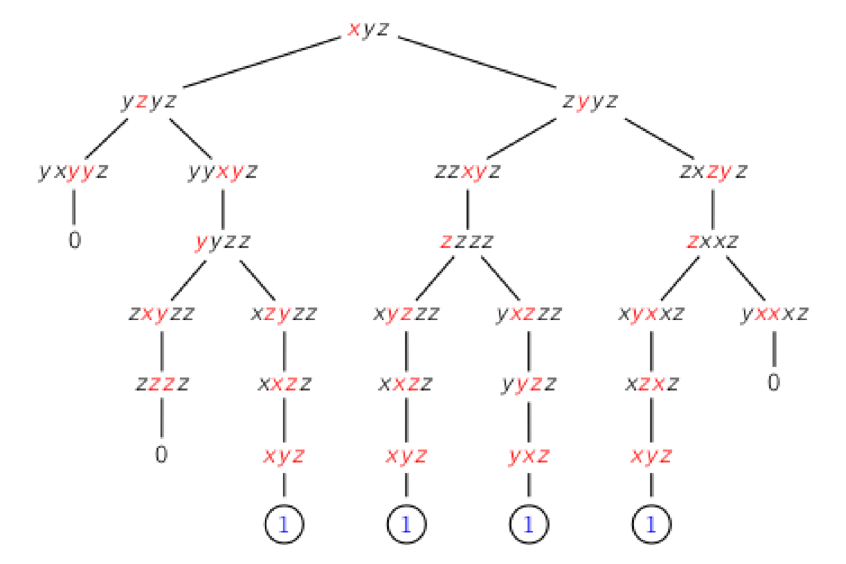
1. L'addition représente le **OU** logique.

Compter les coloriages avec une logique linéaire

$$
\begin{aligned}
x &\mapsto yz + zy \\
y &\mapsto zx + xz \\
z &\mapsto xy + yx \\
xy, yx &\mapsto z \\
yz, zy &\mapsto x \\
zx, xz &\mapsto y \\
xx, yy, zz &\mapsto 0
\end{aligned}
$$

1. L'addition représente le **OU** logique.
2. La concaténation représente le **ET** logique.

Compter les coloriages d'un octaèdre



Comment prouver que $K \neq 0$?

1. Il existe donc $6 \times 4 = 24$ coloriages des sommets de l'octaèdre, ou des faces du cube.

Comment prouver que $K \neq 0$?

1. Il existe donc $6 \times 4 = 24$ coloriages des sommets de l'octaèdre, ou des faces du cube.
2. La méthode fonctionne avec toute triangulation sphérique finie.

Comment prouver que $K \neq 0$?

1. Il existe donc $6 \times 4 = 24$ coloriages des sommets de l'octaèdre, ou des faces du cube.
2. La méthode fonctionne avec toute triangulation sphérique finie.
3. Permet-elle de démontrer le T4C ?

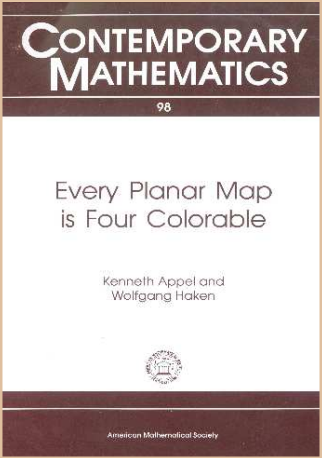
Qu'en pense Paul Erdös ?

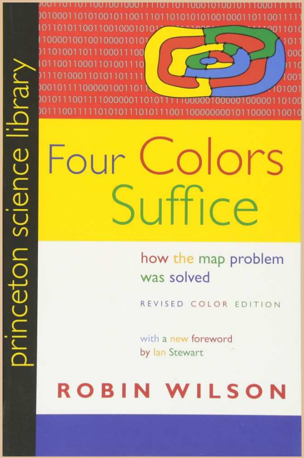
Il s'agit d'un problème subtil mais pas forcément complexe. Il existe peut-être une preuve simple où les polyèdres ne sont qu'un cas particulier.

Qu'en pense William Tutte ?

The Four Colour Theorem is the tip of the iceberg, the thin edge of the wedge and the first cuckoo of spring.

Bibliographie





Merci beaucoup.
Et bons coloriages !