DUMONT Pierre

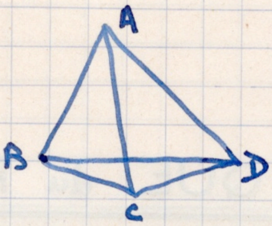
2e Année.

CINEMATIQUE

GENERALITES

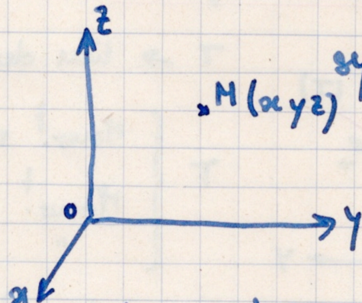
Point matériel . point géométrique affecté coef (masse)
système matériel : Σ pts mat. (discontinu ou continu)

Corps solide :



syst mat. dont distances entre pts → fixes.
grandeur variable : temps.

Peut être rigide ou invariable.



système de référence

M au repos, immobile (non f(t)).

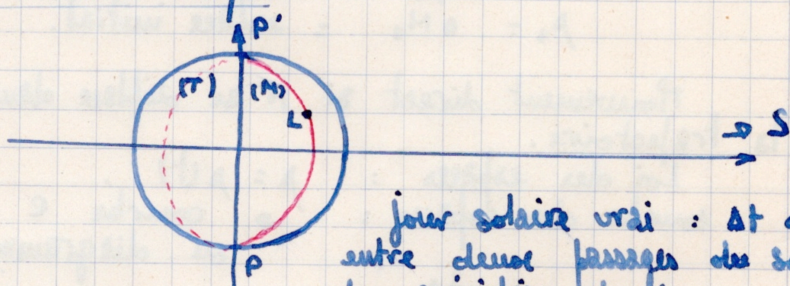
M en mouvement → $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$

De m pour un syst. → appliqué aux divers pts.

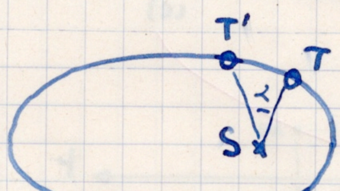
L'objet de la cinem. est l'étude des mouvts → le temps intervient.

Temps : pas de définition . notion première.
L'unité est la seconde : 1/86 400 partie du jour solaire moyen.

jour solaire moyen :



jour solaire vrai : Δt qui s'écoule entre deux passages du soleil ds le plan du méridien de L.



Le jour solaire vrai n'est pas constant car α variable.
→ moyenne des jours sol. vrais.

Temps moyen : méridien Greenwich origine.
T M G (jour universel).

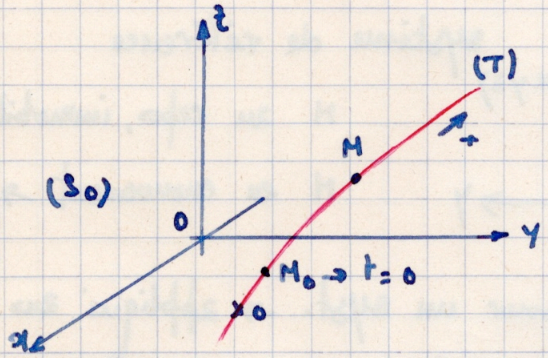
Temps sidéral : Δt entre deux | rotations complètes de la terre sur elle même. | passages consécutifs par 1 étoile.
→ jour sidéral.

Cinématique théorique : propriétés des mouvements.

Cinématique appliquée : construire des mouvements ayant propriétés données.

CINEMATIQUE du POINT

1°/ Mouvement d'un point sur sa trajectoire.



T → lieu des points M.

T { Mouvᵗ rectiligne.
Mouvᵗ circulaire.
" curviligne.

mouvement continu : ds le m̃ sens.
" discontinu : alternatif.

mouvement terre → révolutif.

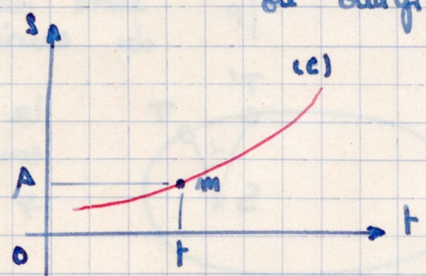
$\widehat{OM} = s = s(t)$ → s : abscisse curviligne de M, espace.

$s_0 = \widehat{OM_0}$ = espace initial.

Mouvement direct si M se déplace dans le sens positif choisi sur la trajectoire.

Loi des espaces : $s = s(t)$.

courbe des espaces : → courbe C définie par $s = f(t)$.
ou diagramme.



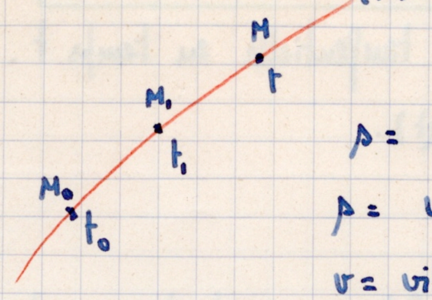
pour construire des diagrammes, il faut se donner des échelles.

u unité tps → 1 heure (par ex.).

unité espace → 1 km (").

2°/ mouvement uniforme : si les espaces parcourus sont = aux tps correspondants.

$$\frac{M_0M_1}{t_1-t_0} = \frac{M_0M}{t-t_0} = v = C^{te}$$



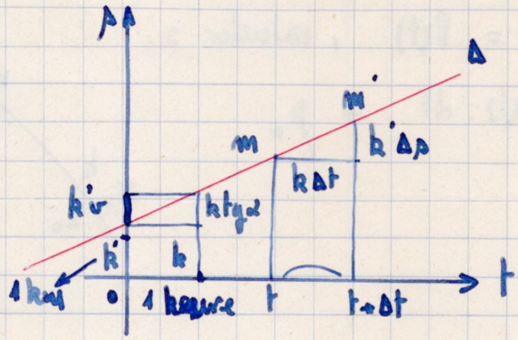
$s = \widehat{M_0M} = v\,(t-t_0)$.

$s = v\,(t-t_0) = vt + b$ → fonct. homogène du temps.

v = vitesse.

$$\frac{ds}{dt} = v \qquad \begin{cases} t=0 \\ s=0 \\ b=0 \end{cases} \rightarrow s = vt.$$

graphiquement, le diagramme est une droite.

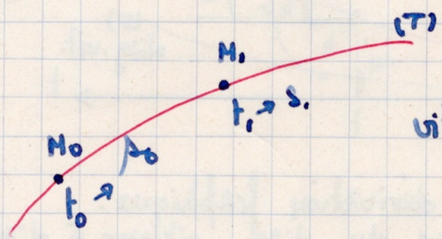


$$tg\,\alpha = \frac{k'\Delta s}{k\,\Delta t}$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{k}{k'}\,tg\,\alpha$$

$$k'v = k\,tg\,\alpha.$$

3°/ mouvement varié (non uniforme).

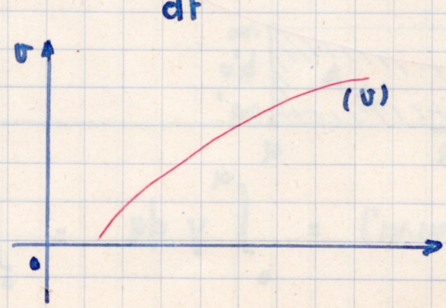


vitesse moy. (alg) $= \dfrac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$ de t_0 à t_1.

de t à $t+\Delta t$ → $v_{moy} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

vitesse (alg.) à l'instant t : $\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{ds}{dt}}$.

$v = \dfrac{ds}{dt}$. val. alg. de la vitesse.



on construit sur ce graphique : $\left\{\begin{array}{l}\text{diag. vitesses} \\ \text{" espaces.}\end{array}\right.$

accélération moyenne de t à $t+\Delta t$ = $\dfrac{\Delta V}{\Delta t}$

On dit qu'un mouvement est retardé si $|V|$ décroît ou V^2 décroît.

V^2 croît : $\leftrightarrow$ $V \gamma_t > 0$

V^2 décroît : $\leftrightarrow$ $V \gamma_t < 0$.

<u>Exercice :</u> étudier et discuter le mouvement $x = a \cos \omega t$

m^t périodique $\rightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$$v = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \omega t$$

$$\gamma_t = \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \cos \omega t.$$

t	0		$\frac{\pi}{2\omega}$		$\frac{\pi}{\omega}$		$\frac{3\pi}{2\omega}$		$\frac{2\pi}{\omega}$
γ_t		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
v	0	$-$	$-a\omega$	$-$	0	$+$		$+$	0
s	a	↘ rétrog. accél.		↘ rétrog. retardé	$-a$	↗ direct accél.		↗ direct retardé	a

Mouvement uniformément varié rectiligne.

Si l'accélération est constante en intensité. (1) $\gamma = \dfrac{d^2s}{dt^2} = a$

(2) $v = \dfrac{ds}{dt} = at + b$

v : fonct. linéaire du temps.

(3) $s = \frac{1}{2} at^2 + bt + c$

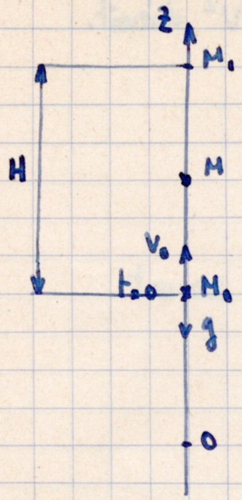
s = fonct. 2° degré du tps et réciproquement.

$t = 0 \rightarrow v = b = v_0$ = vit. initiale.

$s = c = s_0$ = esp. initial.

$$\left.\begin{aligned} s &= \tfrac{1}{2} at^2 \\ v &= at \\ v^2 &= 2as \end{aligned}\right| \text{ on peut simplifier les formules.}$$

<u>Exemple :</u> mouvement vertical d'un pt pesant.



$$\begin{cases} \gamma = -g. \\ v = -gt + v_0 \\ s = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + s_0 \end{cases}$$

$t = \dfrac{V_0}{g}$ si $v = 0 \rightarrow$ H maxi.

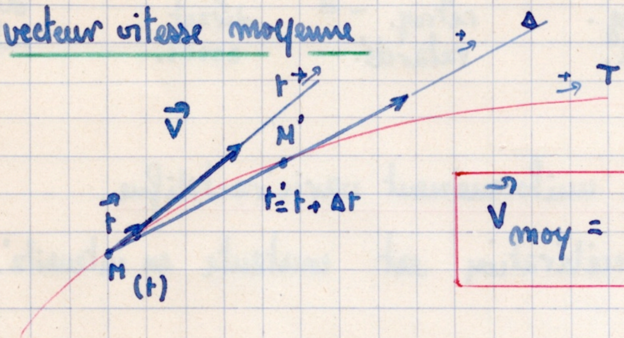
$$s - s_0 = -\frac{1}{2} g \frac{V_0^2}{g^2} + \frac{V_0^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g}.$$

$$H = \frac{V_0^2}{2g}.$$

$$\boxed{V_0 = \sqrt{2gH}}.$$

Vecteur vitesse

a/ vecteur vitesse moyenne



$$\boxed{\vec{V}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}}$$

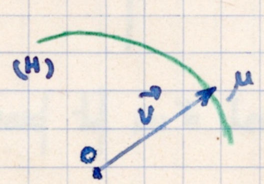
b/ Vecteur vitesse à l'instant t

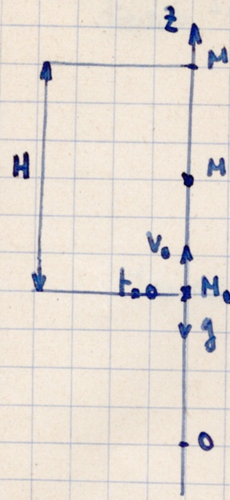
$\Delta t \rightarrow 0$ $\quad \vec{V}_M = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim \dfrac{\overrightarrow{MM'}}{\overset{\frown}{MM'}} \cdot \dfrac{\overset{\Delta s}{\overset{\frown}{MM'}}}{\Delta t} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{vecteur} \\ \text{unitaire de la tgte orientée.}}}{\vec{t}} \cdot \dfrac{ds}{dt}$

$$\boxed{\vec{V} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{t} \cdot \frac{ds}{dt}}$$

c/ Hodographe du mouvement.

On porte à partir de 0 fixe un vecteur $\overrightarrow{O\mu} = \vec{V}$. Le lieu de μ est l'hodographe du mouv^t ou du vecteur vitesse.





$$\begin{cases} \gamma = -g \\ v = -gt + v_0 \\ s = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + s_0 \end{cases}$$

$$t = \frac{V_0}{g} \quad \text{si} \quad v = 0 \rightarrow H \text{ maxi.}$$

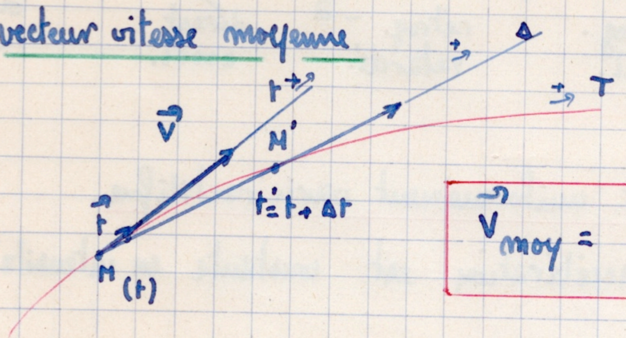
$$s - s_0 = -\frac{1}{2} g \frac{V_0^2}{g^2} + \frac{V_0^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g}.$$

$$H = \frac{V_0^2}{2g}.$$

$$\boxed{V_0 = \sqrt{2gH}}.$$

Vecteur vitesse

a/ vecteur vitesse moyenne



$$\boxed{\vec{V}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}}$$

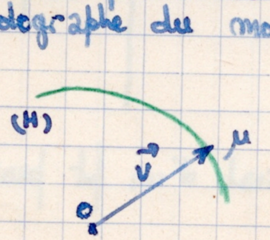
b/ Vecteur vitesse à l'instant t

$$\Delta t \to 0 \qquad \vec{V}_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim \frac{\overrightarrow{MM'}}{\overset{\frown}{MM'}} \cdot \frac{\overbrace{\overset{\frown}{MM'}}^{\Delta s}}{\Delta t} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{vecteur unitaire de la tgte orientée.}}}{\vec{t}} \cdot \frac{ds}{dt}$$

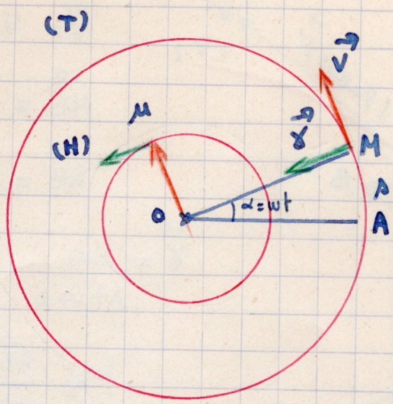
$$\boxed{\vec{V} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{t} \cdot \frac{ds}{dt}}$$

c/ Hodographe du mouvement.

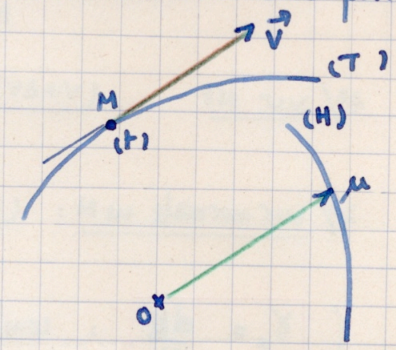
On porte à partir de O fixe un vecteur $\overrightarrow{O\mu} = \vec{V}$. Le lieu de μ est l'hodographe du mouv^t ou du vecteur vitesse.



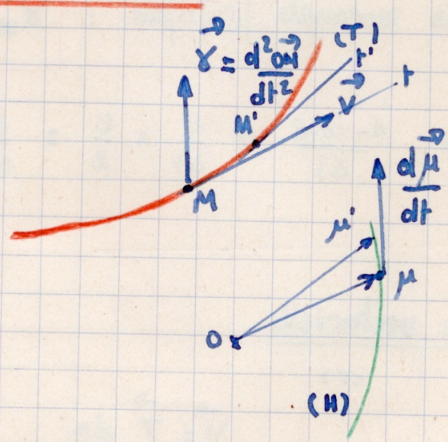
Exemple : Mouvement circulaire et uniforme



Remarque : connaissant la courbe (trajectoire) et l'hodographe, on connaît le mouv.t à condition de connaître une position initiale.



Vecteur accélération



Au mouv.t de M sur sa trajectoire correspond le mouv.t de μ sur l'hodographe.
Par définition, le vecteur accélération est équipollent à la vitesse de μ sur l'hodographe.

$$\boxed{\vec{\gamma} = \frac{d\vec{\mu}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} : \text{dér. vect. seconde du vecteur espace.}}$$

Pl $(O\mu, O\mu')$ // Pl $(Mt, M't')$.

Le vecteur $\vec{\gamma}$ est dans le pl osculateur en M à la courbe.

Détermination du vecteur accélération

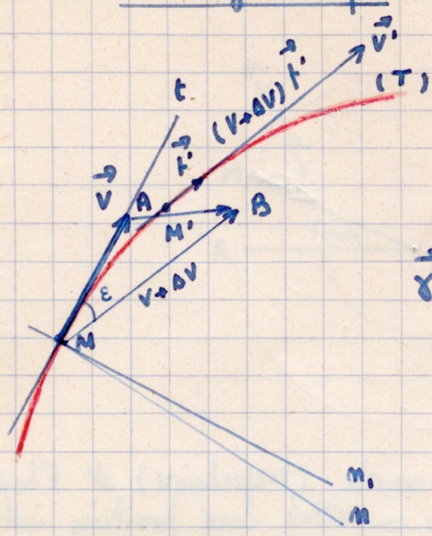
a/ **Cas particulier** : Mouvement circulaire uniforme.

$$V_M = \omega R \qquad \gamma = \omega^2 R$$

$$V_\mu = \omega^2 R \qquad \rightarrow \boxed{\vec{\gamma} = -\omega^2 \vec{OM}}$$

b/ cas général :

1°/ Etude géométrique.



$\vec{V} = V.\vec{t}$

$\vec{MB} = \vec{V'}$

$\vec{AB} = \vec{\Delta V}$

$\vec{\gamma} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{AB}}{\Delta t}$

proj $\dfrac{\vec{AB}}{\Delta t}$ | 1°/ sur Mt
2°/ sur la normale en M.
Mm_1 ds pl (MAB).

Mm : normale principale (qd M'→M).

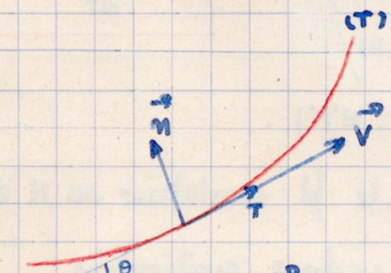
proj $\dfrac{\vec{AB}}{\Delta t}$: 1°/ sur Mt : $\dfrac{(V+\Delta V)\cos\varepsilon - V}{\Delta t} = \dfrac{\Delta V}{\Delta t}\cos\varepsilon - V\dfrac{1-\cos\varepsilon}{\Delta t}$

2°/ sur normale en M : $\dfrac{(V+\Delta V)\sin\varepsilon}{\Delta t} = \underset{\downarrow\, V}{(V+\Delta V)}\ \underset{\downarrow\, 1}{\dfrac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}} \cdot \underset{\downarrow\, \frac{1}{R}}{\dfrac{\varepsilon}{\Delta s}} \cdot \underset{\downarrow\, V}{\dfrac{\Delta s}{\Delta t}}$

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta V}{\Delta t}$ | $\boxed{\gamma_t = \dfrac{dV}{dt}}$: composante tangentielle.
sur la normale principale : $\boxed{\gamma_n = \dfrac{V^2}{R}}$

$1-\cos\varepsilon \sim \dfrac{\varepsilon^2}{2} \to \dfrac{1-\cos\varepsilon}{\Delta t} \to \dfrac{\varepsilon}{\Delta t} \times \dfrac{\varepsilon}{2} = \underbrace{\dfrac{\varepsilon}{\Delta s} \cdot \dfrac{\Delta s}{\Delta t}}_{\to \frac{V}{R}} \cdot \dfrac{\varepsilon}{2} \xrightarrow{0} 0$

2°/ Méthode vectorielle.



$\vec{V} = \vec{T}\dfrac{ds}{dt}$ (1)

$\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d\vec{T}}{dt} \cdot \dfrac{ds}{dt} + \vec{T}\dfrac{d^2s}{dt^2}$

$\dfrac{d\vec{T}}{dt} = \dfrac{d\vec{T}}{d\theta} \cdot \dfrac{d\theta}{ds} \cdot \dfrac{ds}{dt} = \vec{n}\,\dfrac{1}{R}\,\dfrac{ds}{dt}$

$\boxed{\vec{\gamma} = \vec{T}\dfrac{d^2s}{dt^2} + \vec{n}\dfrac{V^2}{R}}$ composantes intrinsèques de l'accélération.

$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$ (Frénet). Les composantes intrinsèques sont indépendantes de l'accélération.

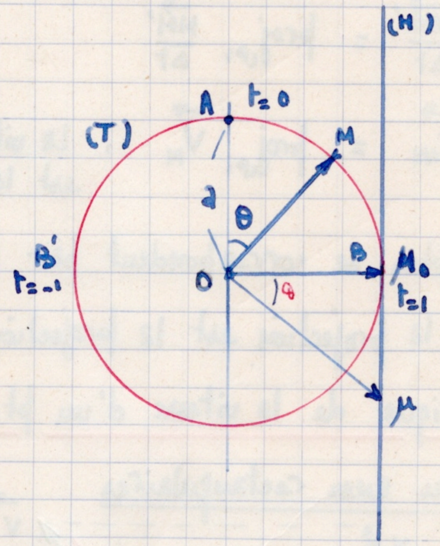
Remarques : 1°/ si la trajectoire est plane, $\vec{\gamma}$ ds le plan de T.

2°/ si $\gamma_t = 0$ → $\frac{dv}{dt} = 0$ → $v = C^{te} = v_0$ → Mout uniforme.

3°/ si $\gamma_n = 0$ → $R = \infty$ → mout rectiligne.

4°/ $\vec{\gamma} \equiv 0$ → mout rectiligne et uniforme. (et réciproquement).

Problème : étudier un mout circulaire dans lequel l'hodographe est une tg Δ à la trajectoire. (par rp au centre).



$|\vec{O\mu}| = V_M = \frac{a}{\cos\theta}$

$\frac{a}{\cos\theta} = a\frac{d\theta}{dt}$

$s = \widehat{AM} = a\theta$

$\frac{ds}{dt} = a\frac{d\theta}{dt}$

$dt = \cos\theta . d\theta$

$t = \sin\theta$. (c=0).

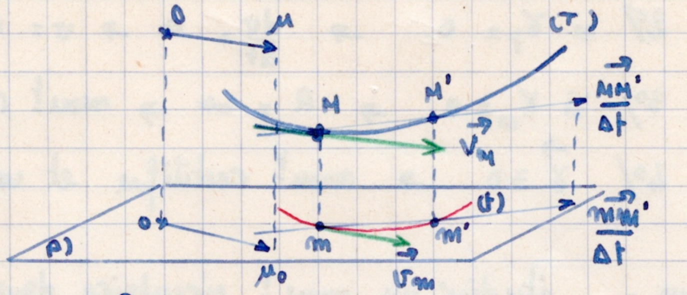
$\theta = \text{Arc}\sin t$.

$$\boxed{\begin{aligned} s &= a \,\text{Arc}\sin t. \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{a}{\sqrt{1-t^2}} \end{aligned}}$$

.

ETUDE ANALYTIQUE des MOUVEMENTS

I- Mouvement de la projection d'un pt M sur un plan ou sur un axe.



$$\vec{mm'} = \text{proj.}_{(P)} \vec{MM'}$$

$$\frac{\vec{mm'}}{\Delta t} = \text{proj}_{(P)} \frac{\vec{MM'}}{\Delta t}$$

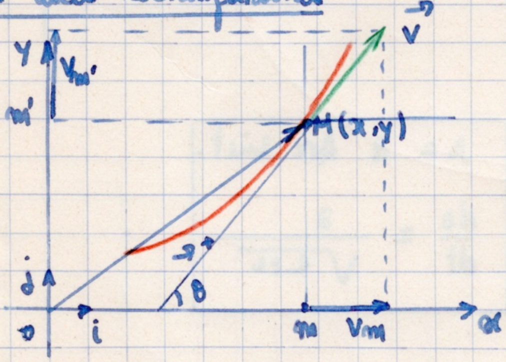
$$\vec{v_m} = \text{proj}_{(P)} \vec{V_M}$$: La vitesse de la projection de M est la projection de la vitesse de M.

Les hodographes se correspondent par projection

L'accé. de la projection est la projection de l'accélération.

II. Expression analytique de la vitesse d'un pt M.

a/ plan des axes rectangulaires



$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$x = x(t)$
$y = y(t)$.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dx} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

$$\boxed{\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} \\ V_y &= \frac{dy}{dt} \end{aligned}}$$

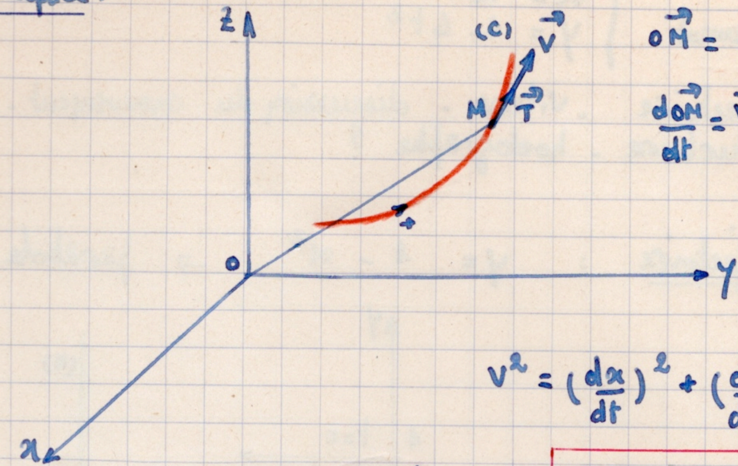
$$v^2 = V_x^2 + V_y^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

$$\boxed{\bar{V} = \pm\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}$$

le signe est déterminé par le sens + choisi sur (T).

$$\cos\theta = \frac{dx}{ds} = \frac{Vx}{V} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{dy}{ds} = \frac{Vy}{V}.$$

b/ dans l'espace.



$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

$$\left|\begin{array}{l} V_x = \dfrac{dx}{dt} \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} \\ V_z = \dfrac{dz}{dt} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\frac{ds}{dt} = V = \pm\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}$$

Le signe dépend de l'orientation de la trajectoire.

$$M_t \left|\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{V_x}{V} \\ \beta = \dfrac{V_y}{V} \\ \gamma = \dfrac{V_z}{V} \end{array}\right.$$

Accélération en coordonnées rectilignes:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\vec{\gamma} \left|\begin{array}{l} \gamma_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \gamma_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ \gamma_z = \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{array}\right. \qquad \vec{\gamma} \left|\begin{array}{l} \gamma_t = \dfrac{dv}{dt} \\ \gamma_n = \dfrac{V^2}{R} \end{array}\right.$$

$\vec{\gamma}_n$ est tjs dirigé dans le sens de la concavité. (signe +).

Remarque: $\vec{\gamma}$ peut être calculée de 2 façons différentes.

$$\boxed{\gamma^2 = \underbrace{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}_{x,\,y,\,z\,=\,f(t)} = \left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \frac{V^4}{R^2}}$$

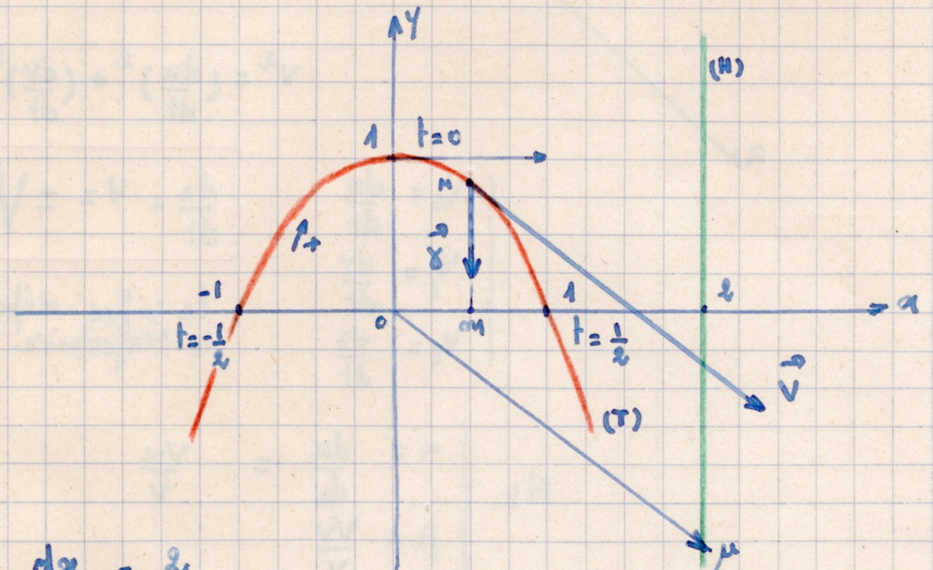
On a une formule pour calculer le rayon de courbure R.

Applications :

$$\text{Mouvement} \quad \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 4t^2 \end{cases}$$

Trajectoire . vitesse . discussion du mouvement . Accélération . rayon de courbure . hodographe ?

Trajectoire : $y = 1 - x^2 \rightarrow$ parabole.



$$\frac{dx}{dt} = 2$$

$$\frac{dy}{dt} = -8t \quad \rightarrow \quad V^2 = 4 + 64t^2$$

$$V^2 = 4(1 + 16t^2)$$

$$\boxed{V = 2\sqrt{1+16t^2}}$$

Hodographe :

$$\vec{O\mu} = \vec{V} \quad \begin{cases} X = 2 \\ Y = -8t \end{cases}$$

Accélération :

$$\begin{cases} \gamma_x = 0 \\ \gamma_y = -8 \end{cases}$$

Rayon de courbure :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{32t}{\sqrt{1+16t^2}}$$

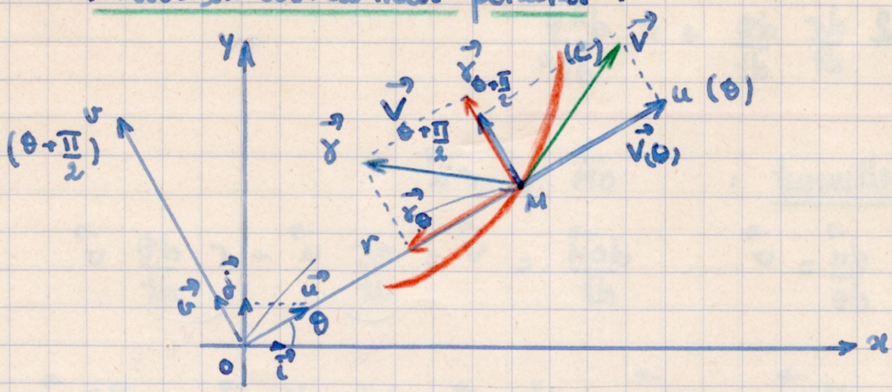
$$\gamma^2 = 8^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2} = \left(\frac{32t}{\sqrt{1+16t^2}}\right)^2 + \frac{16^2(1+16t^2)^2}{R^2}$$

$$\rightarrow R^2 = \frac{16^2(1+16t^2)^2}{64 - \frac{32t}{1+16t^2}} = \frac{16^2(1+16t^2)^3}{64(1+16t^2-32t)}$$

$$R = \frac{16\sqrt{1+16t^2}^3}{8\sqrt{1+16t^2-32t}} = 2\,\frac{\sqrt{1+16t^2}^3}{\sqrt{1+16t^2-32t}}.$$

Composantes de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires.

Vitesse en coordonnées polaires :



$$\vec{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy}{dt}\,\vec{j}$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$V_\theta = \frac{dx}{dt}\cos\theta + \frac{dy}{dt}\sin\theta$$

$$V_{\theta+\frac{\pi}{2}} = -\frac{dx}{dt}\sin\theta + \frac{dy}{dt}\cos\theta$$

$$\begin{array}{c|c|l} -\sin\theta & \cos\theta & \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\,\dfrac{d\theta}{dt} \\ \cos\theta & \sin\theta & \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\,\dfrac{d\theta}{dt} \end{array}$$

$$\boxed{V_\theta = \frac{dr}{dt}}$$

$$\boxed{V_{\theta+\frac{\pi}{2}} = r\,\frac{d\theta}{dt}}$$

Accélération en coordonnées polaires.

$$\vec{\gamma} = \gamma_x\,\vec{i} + \gamma_y\,\vec{j}.$$

$$\begin{cases} \gamma_\theta = \gamma_x\cos\theta + \gamma_y\sin\theta \\ \gamma_{\theta+\frac{\pi}{2}} = -\gamma_x\sin\theta + \gamma_y\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c|l} -\sin\theta & \cos\theta & \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d^2r}{dt^2}\cos\theta - 2\dfrac{dr}{dt}\sin\theta\,\dfrac{d\theta}{dt} - r\cos\theta\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin\theta\,\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \\ \cos\theta & \sin\theta & \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^2r}{dt^2}\sin\theta + 2\dfrac{dr}{dt}\cos\theta\,\dfrac{d\theta}{dt} - r\sin\theta\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 + r\cos\theta\,\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \end{array}$$

$$\boxed{\gamma_\theta = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

$$\boxed{\gamma_{\theta+\frac{\pi}{2}} = 2\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt} + r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

vectoriellement : $\vec{OM} = r\vec{u}$

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{v} \qquad \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{V} = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{V_\theta}\,\vec{u} + \underbrace{r\,\frac{d\theta}{dt}}_{V_{\theta+\frac{\pi}{2}}}\,\vec{v}$$

$$\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \vec{\gamma} = \frac{d^2r}{dt^2}\,\vec{u} + 2\frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{v} + r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\vec{v} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}$$

$\gamma_{\theta+\pi/2}$

γ_θ

Remarque :

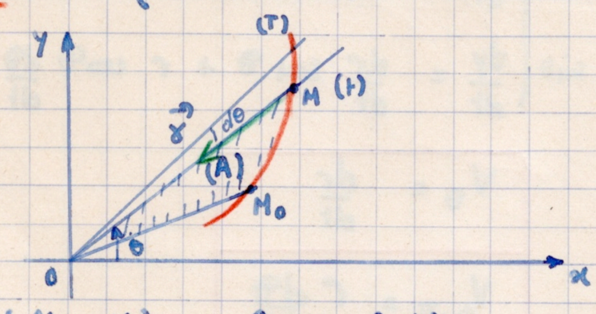
$$V^2 = V_\theta^2 + V_{\theta+\frac{\pi}{2}}^2$$

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2}.$$

Vitesse aréolaire : (are = aire)

Définition :



aire $(M_0OM) = A = A(t)$.

$$\boxed{\text{Vitesse aréolaire} = \frac{dA}{dt}}$$

Calcul

1°/ coordonnées polaires

$$dA = \frac{1}{2}\,r^2\,d\theta.$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\,r^2\,\frac{d\theta}{dt}}$$

2°/ coordonnées rectangulaires :

$$dA = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)}$$

Application : | mouvement à accélération centrale.
| $\vec{\gamma}$ passe par O .

$\gamma_{\theta+\frac{\pi}{2}} = 0$. $\qquad \frac{dA}{dt} = C^{te}$

$$\frac{d^2A}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = \frac{r}{2}\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

$$= \frac{r}{2}\,\gamma_{\theta+\frac{\pi}{2}}$$

si $\gamma_{\theta+\frac{\pi}{2}} = 0 \rightarrow \frac{d^2A}{dt^2} = 0 \rightarrow \frac{dA}{dt} = C^{te} = \frac{C}{2}$

$$\boxed{C = 2\frac{dA}{dt}}$$

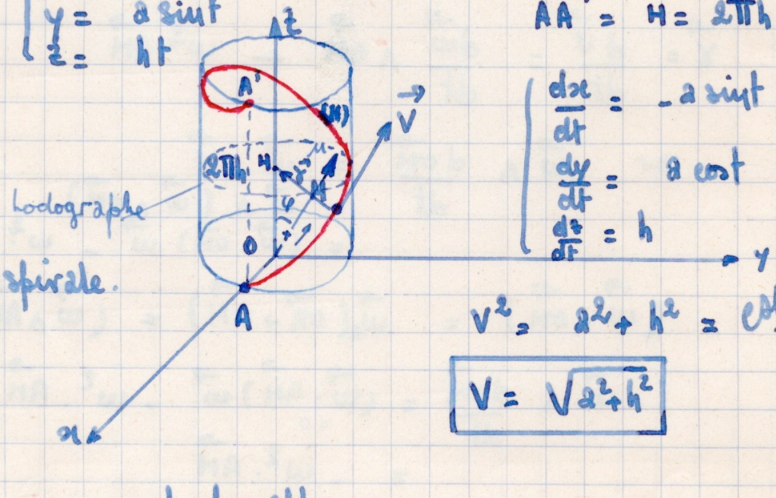
A est proportionnelle au temps.

Réciproquement : si $\frac{dA}{dt} = C^{te} \rightarrow \frac{d^2A}{dt^2} = 0 \rightarrow \gamma_{\theta+\frac{\pi}{2}} = 0$

Acc. centrale : mouv^t astres et planètes.

Exercice : Étudier le mouvement hélicoïdal uniforme d'un pt M.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = ht \end{cases}$$



φ = angle de spirale.

$\overline{AA'} = H = 2\pi h$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a\sin t \\ \frac{dy}{dt} = a\cos t \\ \frac{dz}{dt} = h \end{cases}$$

$V^2 = a^2 + h^2 = C^{te}$

$$\boxed{V = \sqrt{a^2+h^2}}$$

hodographe :

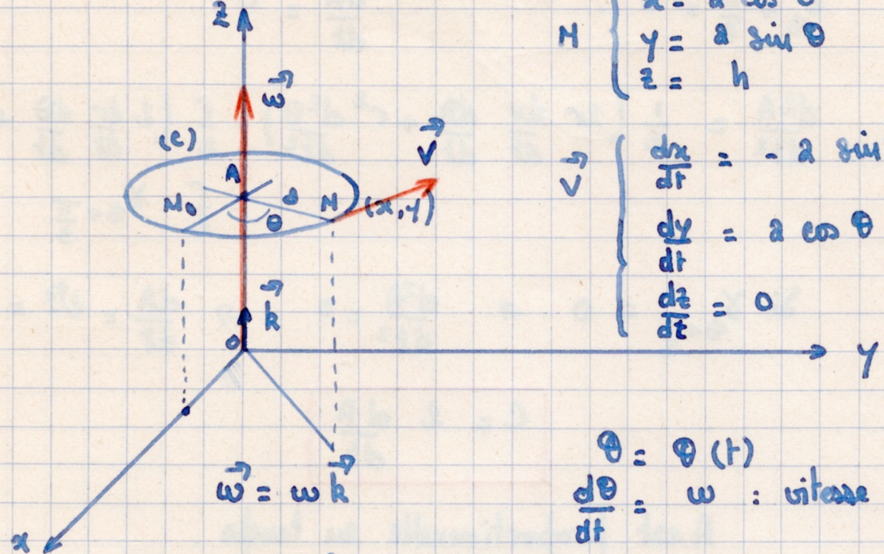
$\vec{O\mu}\begin{cases} X = -a\sin t \\ Y = a\cos t \\ Z = h \end{cases} \rightarrow$ cercle.

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -a\cos t \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -a\sin t \end{aligned}\right\} \rightarrow \gamma^2 = a^2 \rightarrow \vec{\gamma} = -\vec{HM}$$

$$\gamma^2 = \cancel{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2_{=0}} + \frac{V^4}{R^2}$$

$$\boxed{R = \frac{a^2+h^2}{a} = a + \frac{h^2}{a}}$$

Mouvement circulaire



$$M \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = h \end{cases}$$

$$\vec{V} \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -a\sin\theta\,\dfrac{d\theta}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} = a\cos\theta\,\dfrac{d\theta}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\theta = \theta(t)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad : \text{ vitesse angulaire.}$$

$$\vec{V} \begin{cases} V_x = -\omega y \\ V_y = \omega x \\ V_z = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{V = \omega a}$$

$$\boxed{\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}}$$

$\vec{\omega}$ = vecteur vit. angulaire.

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM} - \omega^2 \vec{AM}$$

car
$$\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{V}$$
$$= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$$
$$= (\vec{\omega} \cdot \vec{OM})\,\vec{\omega} - \omega^2 \vec{OM}.$$

$$(\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) = \vec{\omega} \wedge (\vec{OA} + \vec{AM}) = (\vec{\omega} \wedge \vec{AM}) \quad \text{car } \vec{\omega} \wedge \vec{OA} = 0.$$

$$\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{OM}}{dt} = \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{AM})}_{=0}\,\vec{\omega} - \omega^2 . \vec{AM}$$
$$= -\omega^2 . \vec{AM}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_t = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM}}$$
$$\boxed{\vec{\gamma}_M = -\omega^2 . \vec{AM}.}$$

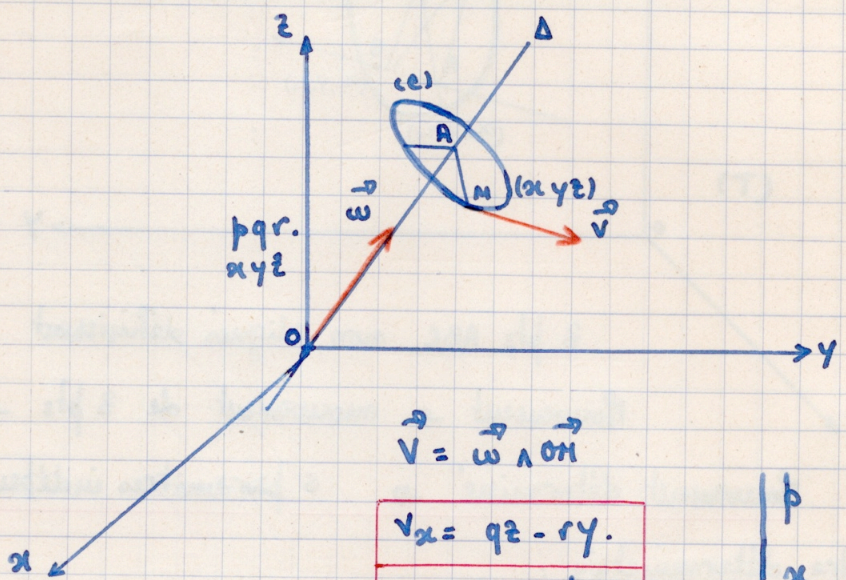
Cas particulier : vitesse uniforme.

$$\vec{\omega} = C^{ste} \qquad \frac{d\omega}{dt} = 0$$

$$\boxed{\gamma_t = 0}$$

$$\boxed{\gamma_n = -\omega^2 R = -\frac{V^2}{R}.}$$

Application au mouvement autour d'un axe quelconque passant par O.



$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

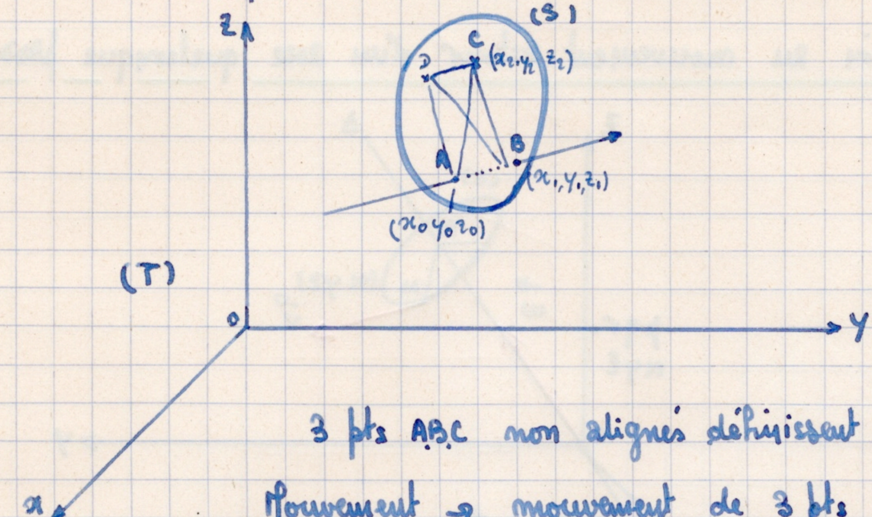
$V_x = qz - ry.$
$V_y = rx - pz.$
$V_z = py - qx.$

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE.

Corps solide : ensemble de points dont la distance est invariable au cours du temps.

a/ dans l'espace.

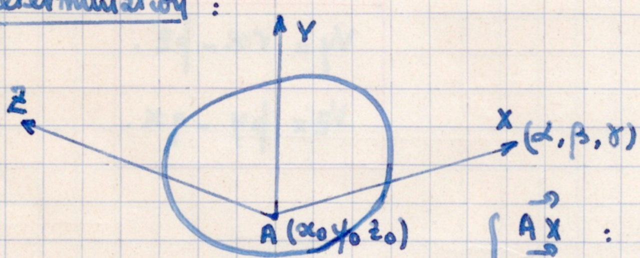


3 pts A,B,C non alignés définissent (S).

Mouvement → mouvement de 3 pts → 9 paramètres.

Mouvement déterminé → 6 paramètres indépendants.

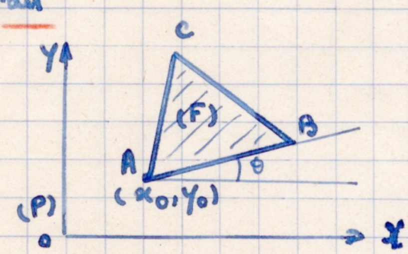
Autre détermination :



$$\left\{\begin{array}{ll} \vec{AX} & : \alpha, \beta, \gamma \\ \vec{AY} & : \alpha', \beta', \gamma' \\ \vec{AZ} & : \alpha'', \beta'', \gamma'' \end{array}\right\} \text{3 par. ind}^{ts}$$

A : x_0, y_0, z_0 → 3 par. ind^{ts}.

b/ dans le plan

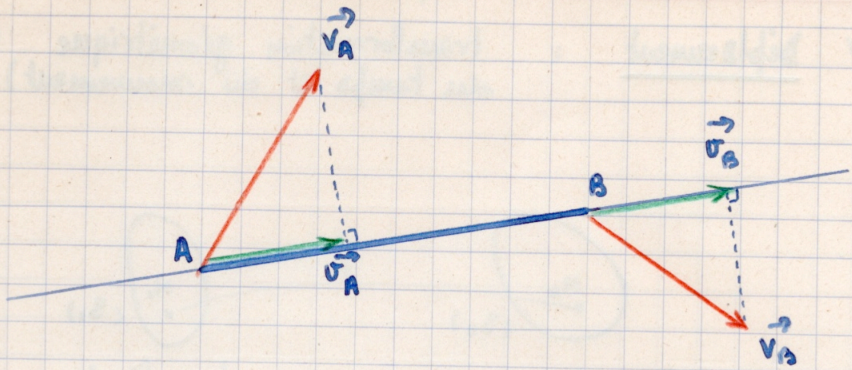


Position (F) dét. → pts A et B.

M^t de (F) $\left|\begin{array}{l} x_0, y_0 \text{ de A} \\ \text{2 par. ind}^{ts} \\ \theta = (\vec{Ox}, \vec{AB}) \end{array}\right.$

→ 3 paramètres indépendants.

Théorème : dans le mouv^t d'un segment de dte AB d'un corps solide, les vect. vit. $\vec{V}_A$ et $\vec{V}_B$ ont des projections équipollentes sur AB.



→ O (fixe)

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

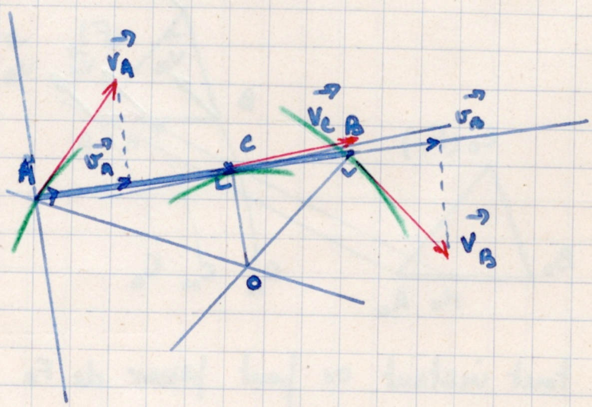
$$\frac{d\vec{AB}}{dt} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

$$\underbrace{\left(\vec{AB} \cdot \frac{d\vec{AB}}{dt}\right)}_{0} = (\vec{AB} \cdot \vec{V}_B) - (\vec{AB} \cdot \vec{V}_A)$$

$$= a\,\bar{v}_B - a\,\bar{v}_A = a(\bar{v}_B - \bar{v}_A).$$

$$\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B}$$

Application : On connait $\vec{V}_A$ et $\vec{V}_B$ de AB → $\vec{V}_C$?



On montre que $V_O = 0$

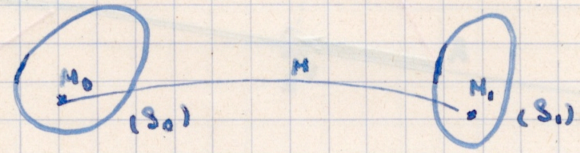
$\vec{V}_C$ est $\perp$ à OC

$\vec{OA} \perp \vec{V}_A$

$\vec{OB} \perp \vec{V}_B$

Déplacement et mouvement d'un corps solide.

a/ **Déplacement** : transformation géométrique (ne tient pas compte du temps et du mouvement).

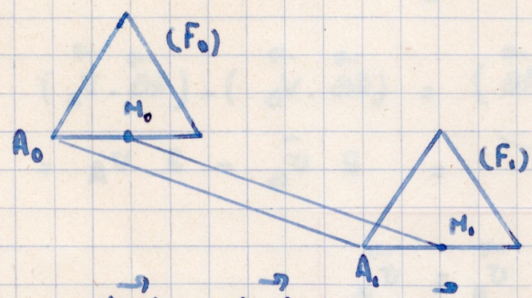


position initiale pos. finale.

b/ **Mouvement** : Trajectoire des divers points de S. Loi de temps.

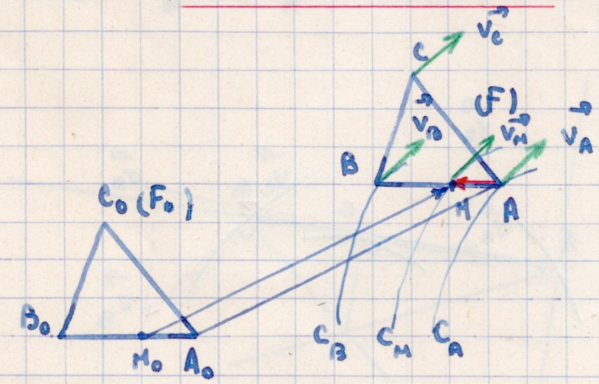
1°/ Translation.

a/ déplacement.



$\overrightarrow{M_0M_1} = \overrightarrow{A_0A_1} = \vec{T}$ vecteur translation.

b/ mouvement de translation.



Si à tout instant on peut passer de F_0 à F par une translation.

$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{A_0A}$ A_0M_0MA parallélogramme.

$$\boxed{\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A_0M_0}}$$

$$\boxed{\vec{V_M} = \vec{V_A}} \quad \boxed{\vec{\gamma}_M = \vec{\gamma}_A}$$

A tout instant, les vecteurs vitesses sont équipollents.

Les trajectoires correspondent par translation.

Réciproquement, si $V_M = V_A$

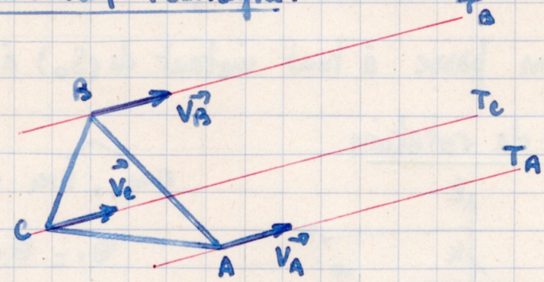
$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\,\vec{OA}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{OM} - \vec{OA})}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\vec{AM} = 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l}\vec{AM} = \vec{A_0M_0} \\ \vec{M_0M} = \vec{A_0A}\end{array}\right| \rightarrow \text{translation.}$$

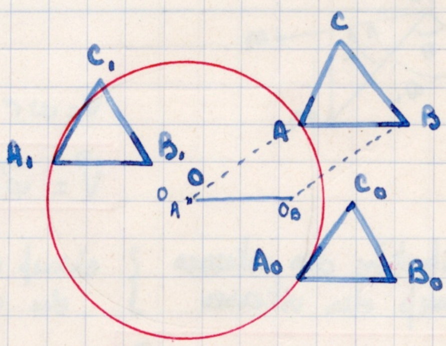
Exemples de mouvements de translation.

1. Translation rectiligne.

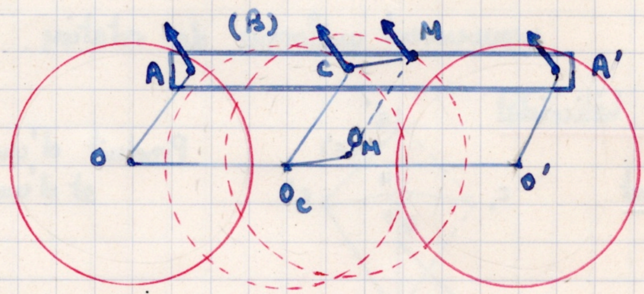


M^t tr. rectiligne et uniforme : $\vec{V} = \vec{V_0}$.

2. Translation circulaire.



<u>Ex</u> : m^t bielle accouplement.



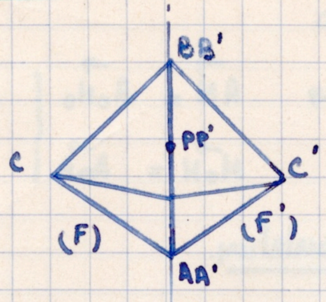
$$\vec{V_A} = \vec{V_C} = \vec{V_M} = \vec{V_A}.$$

| C est sur circonférence homologue à $(O, \vec{OA})$
| M " " " "

Le champ des vitesses est uniforme.

2°. Rotation d'un corps solide.

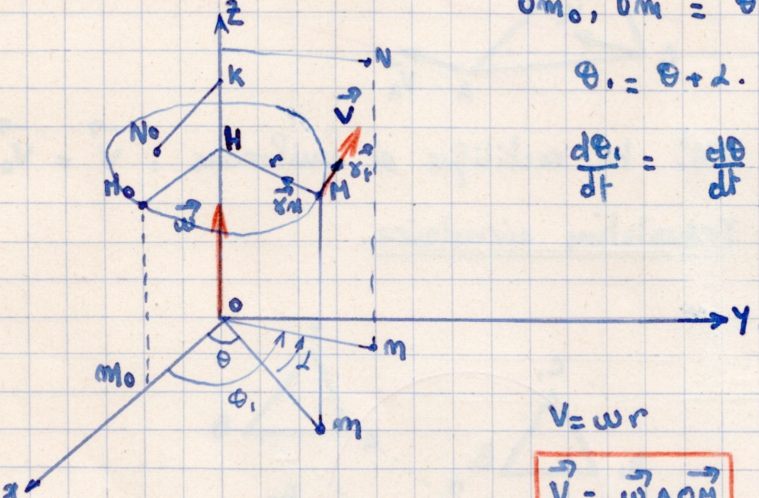
Déplacement



Δ = axe rotation.

Rotation si on passe à tout instant de (S_0) à (S) par rotation autour de Oz.

Mouvement de rotation



$\widehat{Om_0, Om} = \theta$: angle de rotation.

$\theta_1 = \theta + \alpha$.

$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$ vitesse angulaire du solide (S).

$V = \omega r$

$$\boxed{\vec V = \vec\omega \wedge \vec{OM}}$$

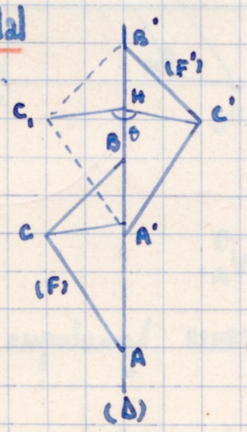
distribution des vitesses } champ des moments
champ des vitesses } du vecteur $\vec\omega$.

$$\boxed{\vec\gamma = \underbrace{\vec\omega\,' \wedge \vec{OM}}_{\gamma_t} - \underbrace{\omega^2\,\vec{HM}}_{\gamma_n}}$$

mouvement uniforme de rotation.

3°/ Mouvement hélicoïdal

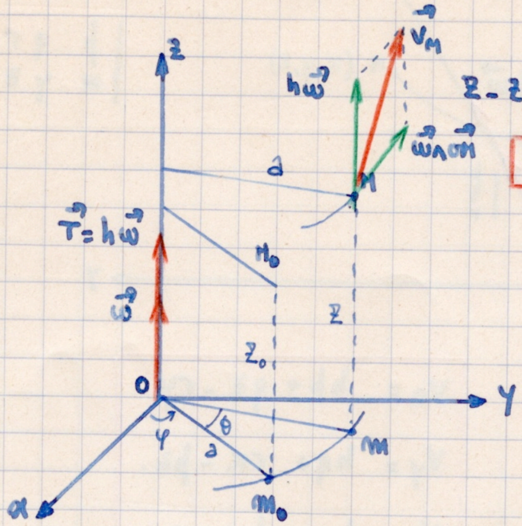
Déplacement



Produit d'une translation $\vec T = \vec{AA'} = \vec{BB'}$
et d'une rotation $\theta = (\widehat{HC_1, HC'})$

Mouvement hélicoïdal d'un solide (S) / Δ

de (S_0) à (S) par un déplacement hélicoïdal de pas réduit constant h.



$z - z_0 = T = h\theta$

$\boxed{z = z_0 + h\theta}$

$h = C^{te}$

$$M \begin{cases} x = a\cos(\theta+\varphi) \\ y = a\sin(\theta+\varphi) \\ z = z_0 + h\theta \end{cases} \qquad \begin{matrix} \varphi = 0 \\ z_0 = 0 \end{matrix} \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = h\theta \end{cases}$$

↳ les pts décrivent des hélices de pas $H = 2\pi h$.

Etude analytique des vitesses.

$$V_M \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -a\sin(\theta+\varphi)\dfrac{d\theta}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} = a\cos(\theta+\varphi)\dfrac{d\theta}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} = h\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\omega y \\ \dfrac{dy}{dt} = \omega x \end{cases}\right\} \vec{\omega}\wedge\vec{OM}$$

$$\frac{dz}{dt} = h\omega \qquad h\vec{\omega} = \vec{T}$$

$$\boxed{\vec{V}_M = \underbrace{h\vec{\omega}}_{\text{translation}} + \underbrace{\vec{\omega}\wedge\vec{OM}}_{\text{rotation.}}} \qquad \boxed{V_M^2 = \omega^2 a^2 + \omega^2 h^2 = \omega^2(a^2+h^2)}$$

Champ des vitesses :

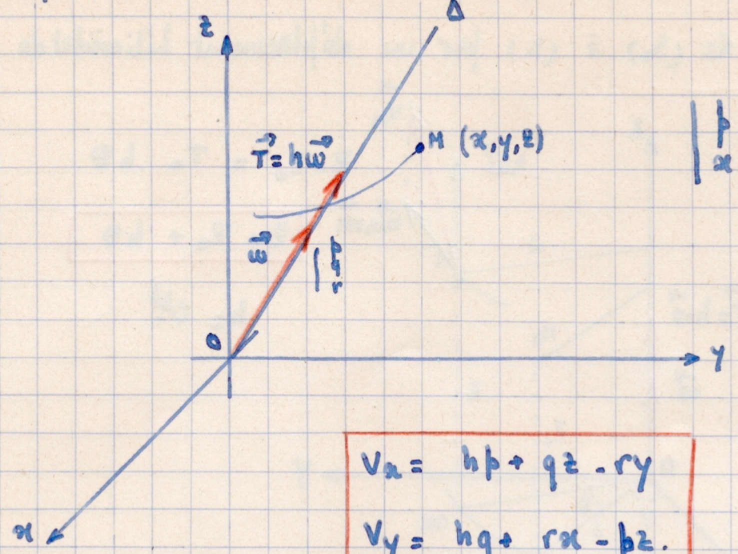
résultante : $\vec{\omega}$

M^t m_O : $h\vec{\omega}$.

$\omega' = \dfrac{d\omega}{dt}$ acc. angulaire.

$$\boxed{\vec{\gamma}_M = h\vec{\omega}' + \vec{\omega}'\wedge\vec{OM} - \omega^2\vec{HM}}$$

Expression analytique de la vitesse :



$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

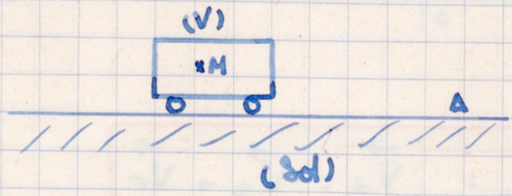
$$\boxed{\begin{aligned} V_x &= hp + qz - ry \\ V_y &= hq + rx - pz. \\ V_z &= hr + py - qx \end{aligned}}$$

COMPOSITION DES MOUVEMENTS

Problème général :

On connait le m^t d'un pt M /S } Etudier m^t de M /S_o
et le m^t de (S) /(S_o) }

Exemple :



M mobile ds (V)

(V) mobile sur sol.

M^t de M /sol ?

Définitions :

a/ mouvement relatif : m^t de M /S

trajectoire relative : lieu de M dans (S).
vitesse relative ; accélération relative.

b/ mouvement de (S) / (S_o) : mouvement d'entraînement

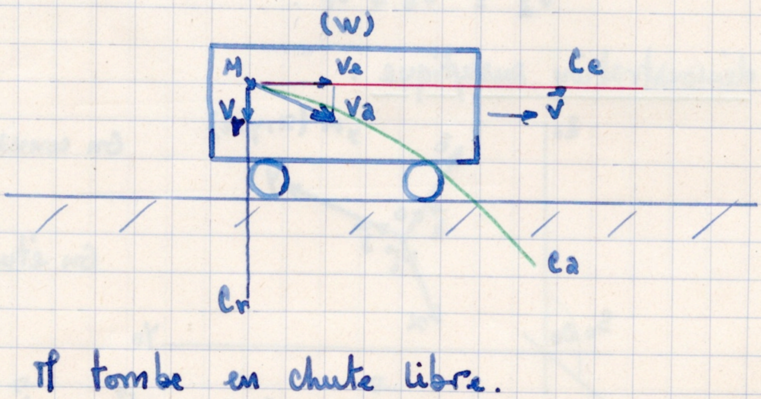
point coïncidant : pt A qui coïncide avec M à l'instant t.

trajectoire d'entraînement : trajectoire de A }
vitesse d'entraînement : vitesse de A. } ds le m^t de S/S_o.
Accélération " : acc. de A. }

c/ mouvement de M / S_o , mouvement absolu.

trajectoire absolue : lieu de M ds (S_o).
vitesse absolue }
accélération absolue } dans m^t de M /S_o .

Exemple de composition de mouvements.

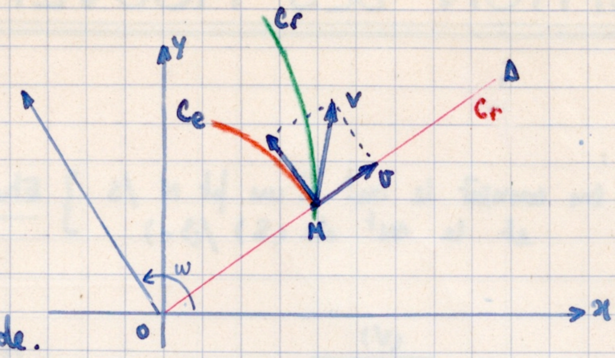


M tombe en chute libre.

Trajectoire relative : Cr } droite.
" entraînement : Ce }
" absolue : Ca : parabole

Autre exemple :

Δ tourne autour de O
ω = Cste



Trajectoire absolue =

Spirale d'Archimède.

Mt relatif

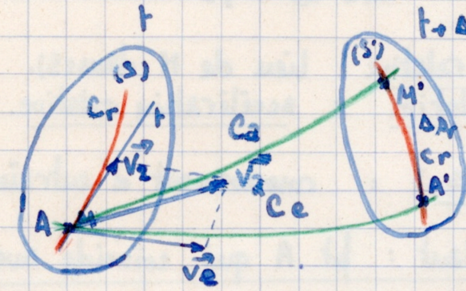
Mt M sur Δ : MRU

Mt entraînement :

rotation /O.

$$\boxed{\text{Théorème fondamental : } \vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r}$$

a/ démonstration géométrique



(M / S)
(S / S₀)
(M / S₀)

$$\vec{MM'} = \vec{MA'} + \vec{A'M'}$$

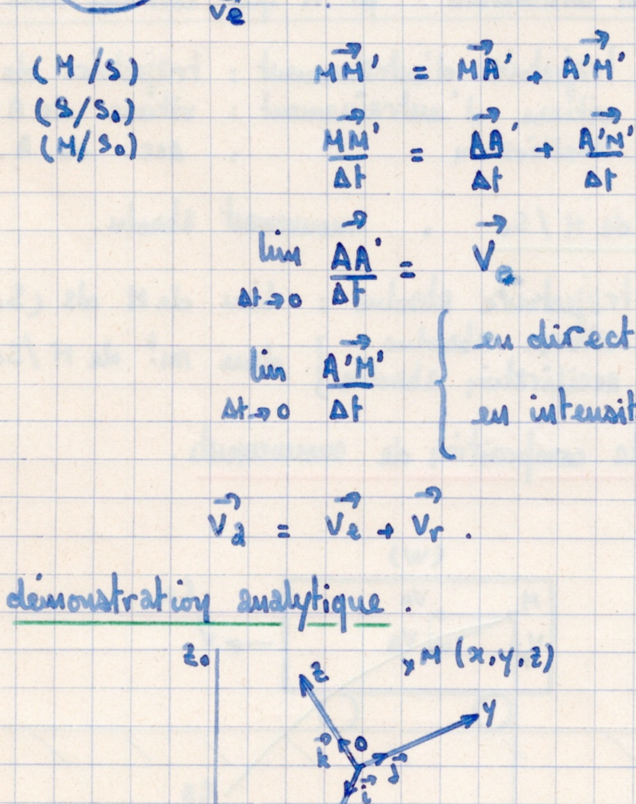
$$\frac{\vec{MM'}}{\Delta t} = \frac{\vec{AA'}}{\Delta t} + \frac{\vec{A'M'}}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{AA'}}{\Delta t} = \vec{V_e}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A'M'}}{\Delta t} \left\{ \begin{array}{l} \text{en direction : tgte A t à } C_r . \\ \text{en intensité : } \lim \dfrac{\Delta\Delta_r}{\Delta t} = V \end{array} \right\} \vec{V_r}$$

$$\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r} .$$

b/ démonstration analytique.



On connaît $\left\{ \begin{array}{l} \text{mt } M/S_0 \\ S/S_0 \end{array} \right.$

On étudie le mt M / S₀.

$$\vec{O_0 M} = \vec{O_0 O} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} .$$

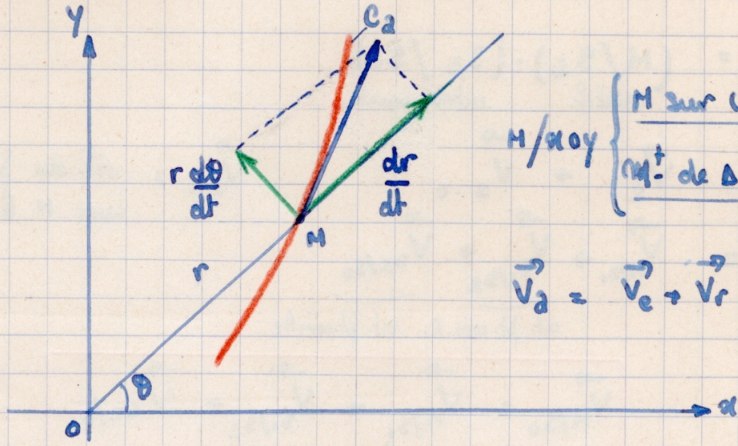
Ve = vitesse de A (conf. avec M). On laisse alors x, y, z fixes.

$$\vec{V_a} = \frac{d\,\vec{O_aM}}{dt} = \underbrace{\frac{d\,\vec{O_aO}}{dt} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}}_{V_e} + \underbrace{\frac{dx}{dt}\cdot\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}}_{V_r},$$

$$\vec{V_r} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

$$\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r}.$$

Composantes de la vitesse d'un point M en coordonnées polaires.



M/xOy $\begin{cases} \text{M sur } (\Delta) : \text{M}^t \text{ relatif} : \vec{OM} = r \\ \text{M}^t \text{ de } \Delta / (xOy) : \text{M}^t \text{ entraînement} \end{cases}$

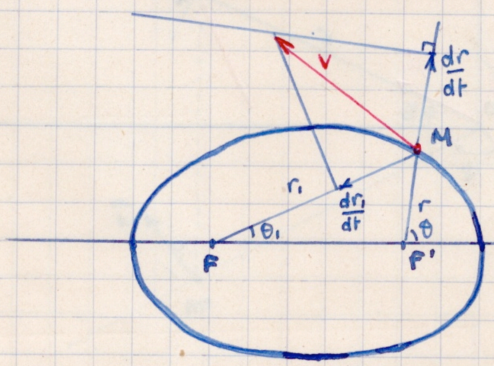
$$\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r}$$

On a : $\begin{cases} V_e = r\dfrac{d\theta}{dt} \\ V_r = \dfrac{dr}{dt} \end{cases}$

On retrouve bien les composantes de la vitesse en coordonnées polaires.

Applications : tangentes aux courbes par la méthode de Roberval.

Ellipse :



$$r + r_1 = 2a$$

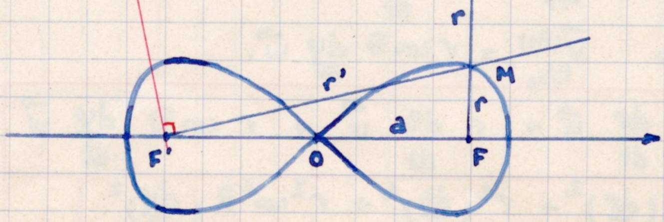
$$\frac{dr}{dt} + \frac{dr_1}{dt} = 0$$

D'où la construction : on porte deux longueurs égales sur les rayons vecteurs. → la tangente est la bissectrice ext^{re} des rayons vecteurs.

Lemniscate de Bernoulli :

$$rr' = a^2$$

$$\frac{dr}{dt}r' + r\frac{dr'}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{dr'}{dt}} = -\frac{r}{r'}$$



Composition d'un nombre quelconque de mouvements

Données $\left| \begin{array}{l} M/S_1 \\ S_1/S_2 \\ S_2/S_0 \end{array} \right.$ → Étudier M/S_0.

$(M/S_2) = \underset{\text{relatif.}}{(M/S_1)} \cdot \underset{\text{entraînement.}}{(S_1/S_2)}$ → produit. (cf. déplacements)

$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{V}_{1.2}$ $\qquad \vec{V}_{1.2}$ = vit. du pt A_1 de S_1 qui coïncide avec M à l'instant t.

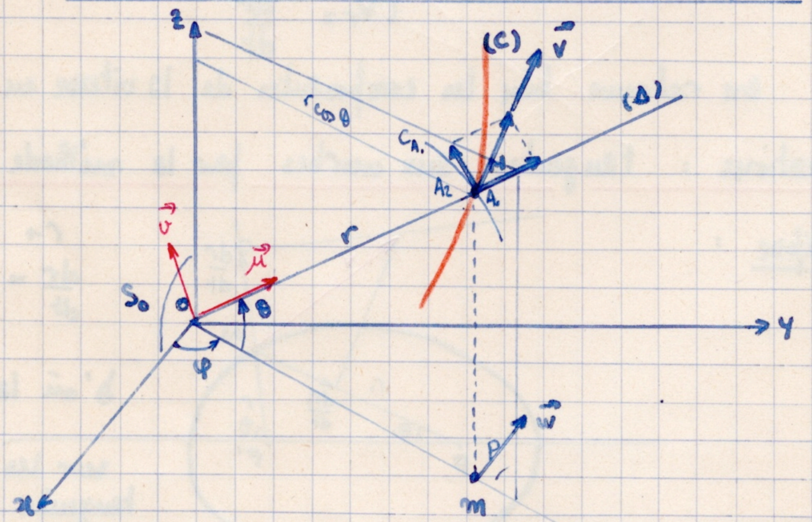
$\underset{\text{absolu}}{(M/S_0)} = \underset{\text{relatif.}}{(M/S_2)} \cdot \underset{\text{entraînement.}}{(S_2/S_0)}$

$\vec{V}_{M/S_0} = \vec{V}_2 + \vec{V}_{2.0}$ $\qquad \vec{V}_{2.0}$ = vit. du pt A_2 de S_2 qui coïncide avec M à t.

$\vec{V}_{M/S_0} = \vec{V}_{M/S_1} + \underbrace{\vec{V}_{S_1/S_2}}_{\text{vit. pt. coïn. } A_1} + \underbrace{\vec{V}_{S_2/S_0}}_{\text{Vit. pt. coïn } A_2}$

$$\boxed{\vec{V}_{M/S_0} = \vec{V}_{M/S_1} + \vec{V}_{S_1/S_2} + \vec{V}_{S_2/S_0}}$$

Application : vitesse en coordonnées polaires dans l'espace.



$M/S_0 = (M/\Delta) \cdot (\Delta/P) \cdot (P/S_0)$

$M/\Delta = \rightarrow \quad \vec{V}_r = \frac{dr}{dt}\vec{u}$

$(\Delta/P) \rightarrow \quad \vec{V}^{(A_1)}_{\Delta/P} = r\frac{d\theta}{dt}\vec{v}$

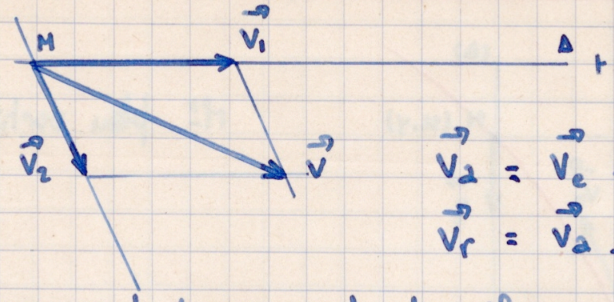
$P/S_0 \rightarrow \quad \vec{V}^{(A_2)}_{P/S_0} = r\cos\theta \frac{d\varphi}{dt}\vec{w}.$

$$\boxed{\vec{V}_M = \frac{dr}{dt}\vec{u} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{v} + r\cos\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{w}}$$

$$\boxed{V_M^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\cos^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$$

Composition de 2 mouvements rectilignes et uniformes

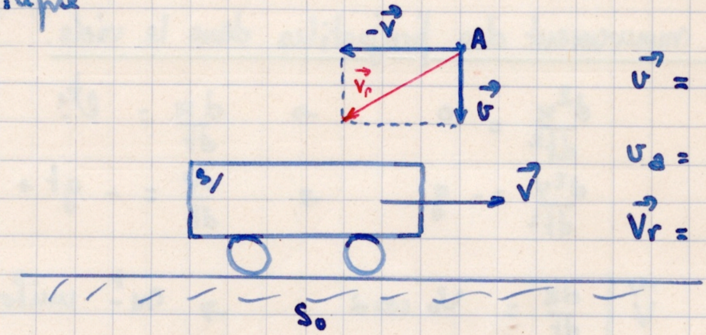
$$\left.\begin{array}{l} M/\Delta \rightarrow \vec{V_1} \\ \Delta/P \rightarrow \vec{V_2} \\ M/P \rightarrow \vec{V} \end{array}\right\} \quad \vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$$



$$\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r}$$
$$\vec{V_r} = \vec{V_a} - \vec{V_e}$$

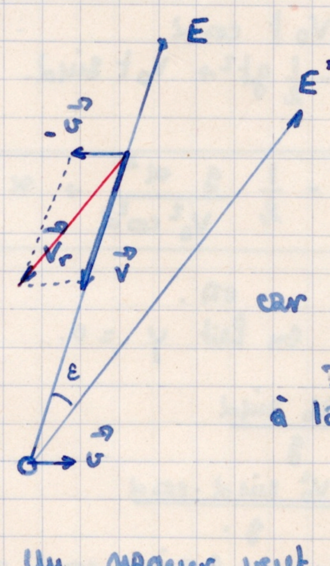
mouvement de M rect. et uniforme.

Exemple: mouvement d'une goutte de pluie par rp à un véhicule en mouvement rectiligne



$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{V_r}$$
$$v_a = v_e + v_r$$
$$\vec{V_r} = \vec{v} - \vec{V}$$

Aberration des Etoiles



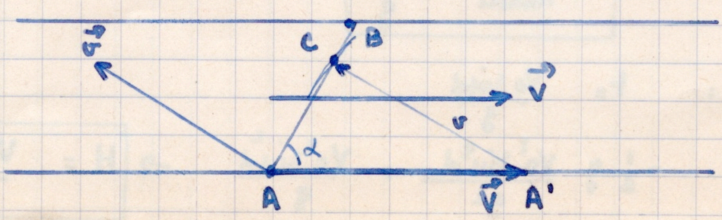
$\vec{V}$: vitesse lumière
$\vec{v}$: " translation de la terre (30 km/s).

$$\vec{V_r} = \vec{V} - \vec{v}$$

L'observateur voit l'étoile vers E', car rayons lumineux suivant $\vec{V_r}$.
ε = aberration $\simeq$ 3''.
Il y a une autre aberration due à la rotation de la terre.

Mouvement du nageur.

Un nageur veut traverser un cours d'eau rect. dont vit. uniforme est $\vec{V}$. Il veut aller de A à B.
v = vit. arith. du nageur.
Trouver la direction de la vit. du nageur / courant.

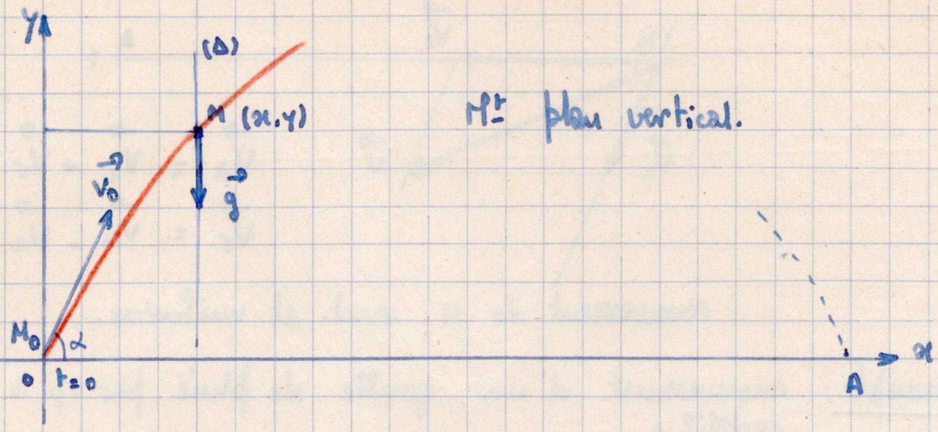


$$\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r}$$
$$= \vec{V} + V_r.$$

Il faut que $\vec{V_A}$ soit sur AB. On porte $\vec{AA'} = \vec{V}$. cercle (A', v) coupe AB en C. $\rightarrow \vec{v}$.

Il faut $v \geq V \sin\alpha$.

Composition d'un mouvement rectiligne et uniforme et d'un mouvt unift accéléré



Mt plan vertical.

Exemple : mouvement des projectiles dans le vide.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \rightarrow \frac{dx}{dt} = C^{te}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \rightarrow \frac{dy}{dt} = -gt + C^{te}$$

$$\vec{V} \left| \begin{array}{ll} \dfrac{dx}{dt} = V_0 \cos\alpha & \rightarrow \text{mt uniforme } (\Delta / xOy) \\ \dfrac{dy}{dt} = -gt + V_0 \sin\alpha & \rightarrow \text{mt uniformément accéléré } (M/\Delta) \end{array} \right.$$

$$M \left| \begin{array}{l} x = V_0 t \cos\alpha \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 t \sin\alpha. \end{array} \right\} \text{ équations du mouvement.}$$

Trajectoire :

$$\boxed{y = -\frac{1}{2} \frac{g\, x^2}{V_0^2 \cos^2\alpha} + x \operatorname{tg}\alpha.}$$

Portée du projectile : OA.

On fait $y = 0$.

$$t = \frac{2 V_0 \sin\alpha}{g}$$

$$OA = \frac{2 V_0^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g}.$$

OA maxi $\rightarrow 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha = 1$

$$\rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$$

$$\rightarrow \boxed{OA_{maxi} = \frac{V_0^2}{g}}$$

hauteur H : $t = \dfrac{V_0 \sin\alpha}{g}$

$\dfrac{dy}{dt} = 0$ $\quad -\dfrac{1}{2} g \dfrac{V_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} + \dfrac{V_0^2 \sin^2\alpha}{g} \rightarrow \boxed{H = \dfrac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}$

Enveloppe des trajectoires

$$\operatorname{tg} \alpha = m$$

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g x^2}{V_0^2}(1 + m^2) + m x.$$ On écrit que $\Delta = 0$

$$\frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2}x^2 m^2 - m x + y + \frac{1}{2}\frac{g x^2}{V_0^2} = 0$$

$$x^2 - \frac{4}{2}\frac{g x^2}{V_0^2}\left(y + \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2}\right) = 0$$

$$\boxed{y = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2} \rightarrow \text{parabole de sûreté}}$$

Mouvements réciproques ou inverses.

On appelle m^t récip. ou inverse S_1/S_2 et S_2/S_1.

Théorème : Dans deux mouvements réciproques ou inverses, les vitesses d'un m̂ point M sont opposées.

$$\vec{V}(M)_{S_1/S_2} + \vec{V}(M)_{S_2/S_1} = 0$$

M pt de S_1 $\quad S_1/S_2 \quad S_2/S_0$ $\left\{\begin{array}{l} m^t \text{ relatif} : m^t\ S_1/S_2 \\ m^t \text{ entr.} : m^t\ S_2/S_0 \end{array}\right\}$ m^t abs : S_1/S_0

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

$$\vec{V}(M)_{S_1/S_0} = \vec{V}(M)_{S_2/S_0} + \vec{V}(M)_{S_1/S_2}.$$

$$(S_1 \equiv S_0)$$

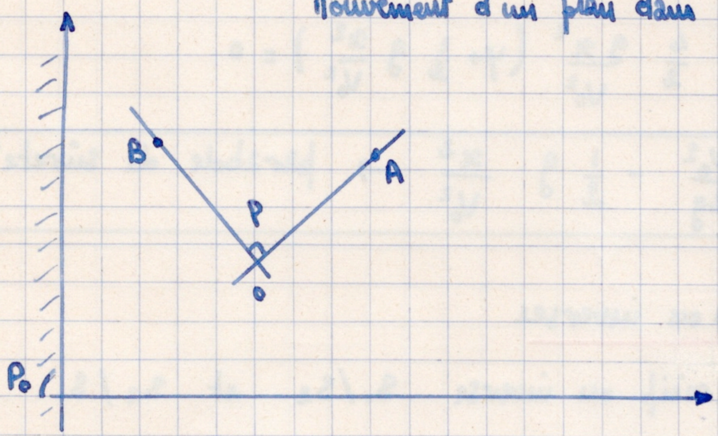
$$0 = \vec{V}(M)_{S_2/S_0} + \vec{V}(M)_{S_1/S_2}.$$

$$\boxed{\vec{V}_{(M)\,S_2/S_0} = -\vec{V}_{(M)\,S_1/S_2}.}$$

MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN. (OU MOUVEMENT EPICYCLOIDAL PLAN).

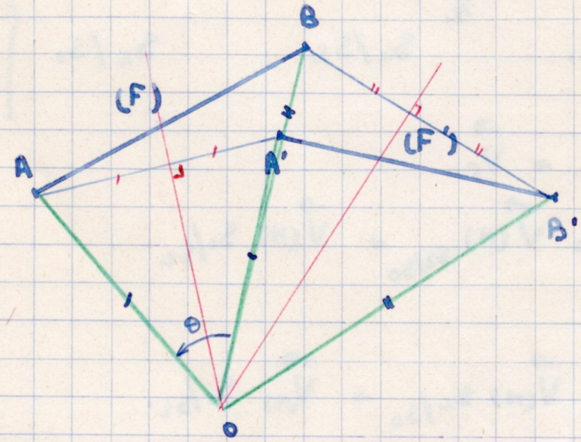
Définition

Mouvement d'un plan dans un autre plan.



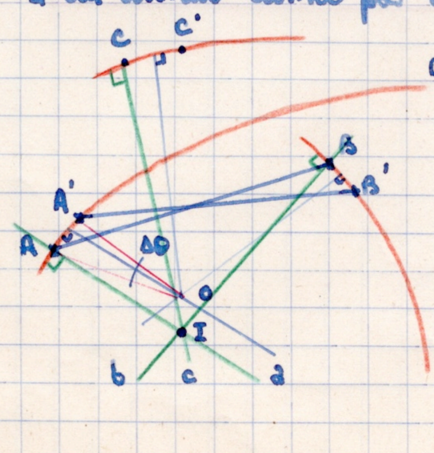
Deux pts A et B définissent la position du plan.

Théorème 1 : On peut passer d'une position (F) à (F') par une rotation en général et exceptionnellement par une translation.



$\theta = \widehat{AOA'}$ = rotation.

Théorème 2 : Les normales aux trajectoires de la figure mobile passent à un instant donné par un m point.



Les méd. des segments AA', BB', CC' sont concourantes (Th I).

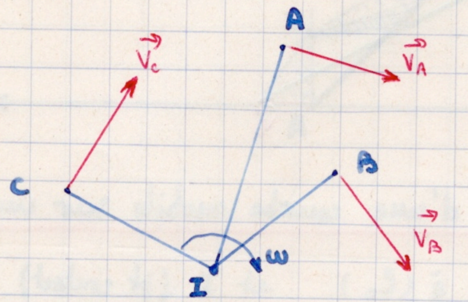
Si $\Delta t \to 0$, $A' \to A$, $B' \to B$, $C' \to C$

méd. tendent vers les normales en A, B, C. Elles sont concourantes.

tr $\left| \begin{array}{l} AOA' \\ BOB' \\ COC' \end{array} \right\}$ semblables. $\dfrac{AA'}{AO} = \dfrac{BB'}{BO} = \dfrac{CC'}{CO} = 2 \sin \dfrac{\theta}{2} \sim \Delta\theta$

$$\frac{\frac{AA'}{\Delta t}}{AO} = \frac{\frac{BB'}{\Delta t}}{BO} = \frac{\frac{CC'}{\Delta t}}{CO} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \omega = \lim \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \neq 0$$

A la limite $\dfrac{V_A}{IA} = \dfrac{V_B}{IB} = \dfrac{V_C}{IC} = \omega \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} V_A = \omega . IA \\ V_B = \omega . IB \\ V_C = \omega . IC \end{array}}$

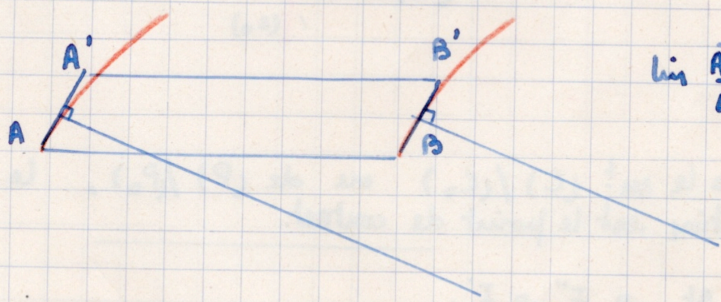


La distribution des vit. à l'instant t est la m̄ que ds rotation de centre I et de vit. ang. ω.

I = centre instantané de rotation (C.I.R)

si Δθ → 0 , I s'éloigne à l'∞.

Cas particulier



$\lim \dfrac{\vec{AA'}}{\Delta t} = \lim \dfrac{\vec{BB'}}{\Delta t} = \vec{V} =$ transl. instantanée.

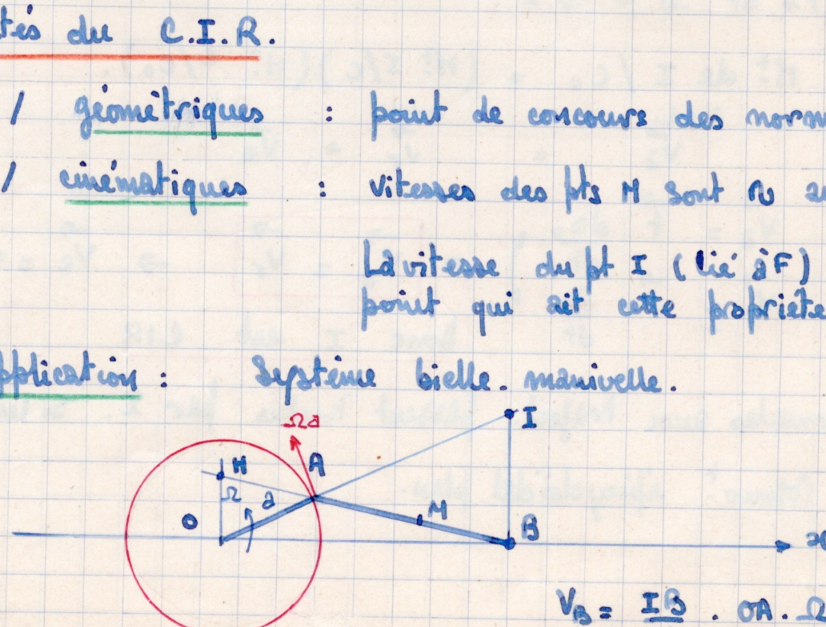
Propriétés du C.I.R.

a/ géométriques : point de concours des normales aux trajectoires.

b/ cinématiques : vitesses des pts M sont ⊥ aux segments IM.

La vitesse du pt I (lié à F) est nulle. c'est le seul point qui ait cette propriété.

Application : Système bielle-manivelle.

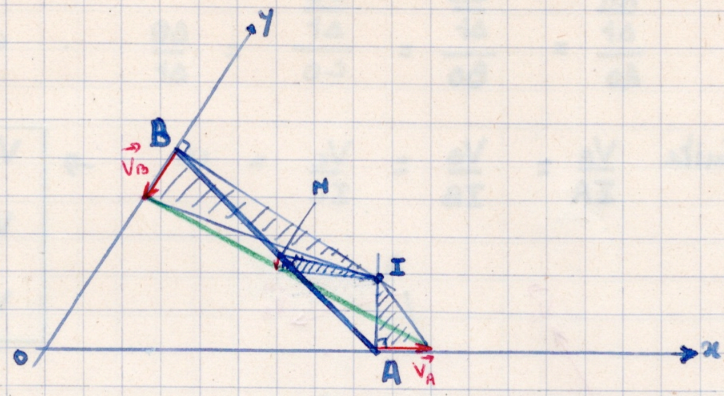


$\dfrac{V_B}{IB} = \dfrac{V_A}{IA}$

$V_B = \dfrac{IB}{IA} . OA . \Omega$ or $\dfrac{IB}{IA} = \dfrac{OH}{OA}$

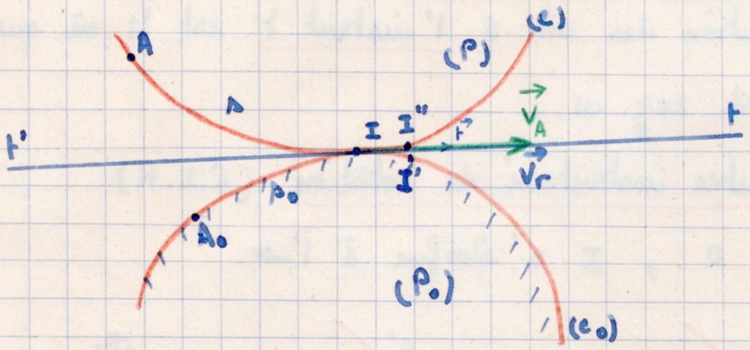
$\boxed{V_B = \Omega . \overline{OH}}$.

2e exemple: angle fixe xOy. $AB = C^{te}$ sur Ox, Oy → CIR ?



II. Roulement sans glissement d'une courbe mobile sur une courbe fixe.

Définition : (C) reste tgte à (C_0) et I (pt contact) parcourt des arcs égaux sur (C) et (C_0).



$\widehat{A_0 I} = \widehat{AI}$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A_0 I} = s_0 \\ \widehat{AI} = s\end{array}\right\} s = s_0$$

Théorème : dans le m^t (C) / (C_0) ou de (P) / (P_0), le centre instantané de rotation est le point de contact.

à $t + \Delta t$ → I″ → I′.

$$\underset{\text{absolu}}{M^t \text{ de } I / C_0} = \underset{\text{relatif}}{(M^t\ I/C)}\ \underset{\text{entraînt}}{(M^t\ C/C_0)}.$$

$$\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e}$$

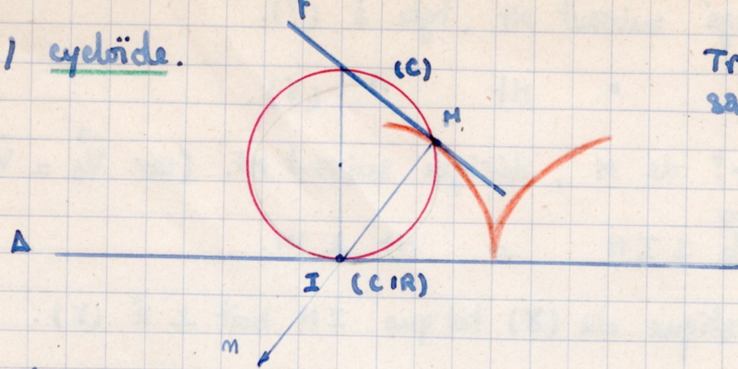
$$\left.\begin{array}{l}\vec{V_a} = \vec{t}\ \dfrac{ds_0}{dt} \\ \vec{V_r} = \vec{t}\ \dfrac{ds}{dt}\end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\vec{V_a} = \vec{V_r}} \rightarrow \vec{V_e} = 0$$

Donc I est CIR

Les normales aux traject. passent toutes par I. Si les trajectoires sont des cercles → Mouv^t épicycloïdal plan.

Applications :

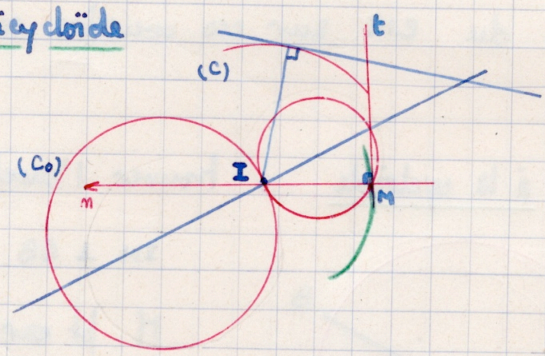
a/ cycloïde.



Trajectoire de (C) roulant sans glisser sur (Δ).

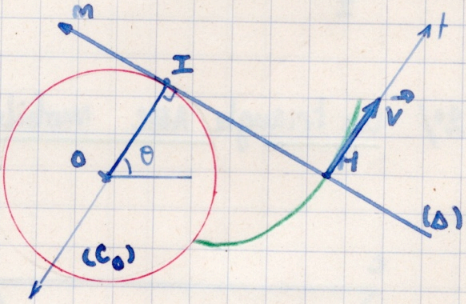
Construction de la tgte Mt.

b/ épicycloïde



c/ développante de cercle.

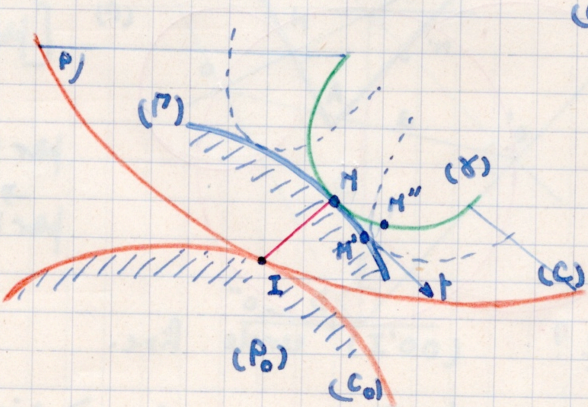
C'est la trajectoire d'un pt M de Δ qui roule sans glissement sur C_0.



$\theta = \omega t$

$V = \omega \cdot IM$

Enveloppe d'une courbe entraînée avec la figure mobile.



(C) mobile entraîne (γ).
(Γ) enveloppe de (γ).

à t → M
à t' → M' M'' sur (γ)

Mt de M sur (Γ) = [Mt de (M/γ)] [Mt (γ/P)]

$$\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e}$$

$\vec{V_a}$ = vecteur dirigé suivant Mt, tgte à (Γ).
$\vec{V_r}$ = vecteur " " Mt " (γ).

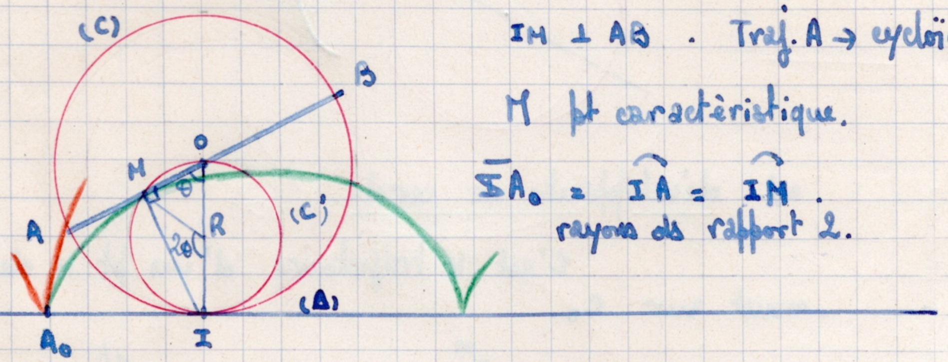
$\vec{V_e}$ = vit entr.t de M, dirigée suivant Mt. (car $\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e}$)

$\vec{V_e} \perp IM \quad \rightarrow \quad Mt \perp IM$.

M pt caractéristique de (γ) tel que IM soit ⊥ à (γ).

Les pts caractéristiques des courbes (γ) de la fig. mobile sont les pieds des normales abaissées du CIR sur ces courbes mobiles. Il peut y en avoir plusieurs.

Applications : 1°/ à la cycloïde : trouver l'enveloppe d'un ∅ du cercle mobile.

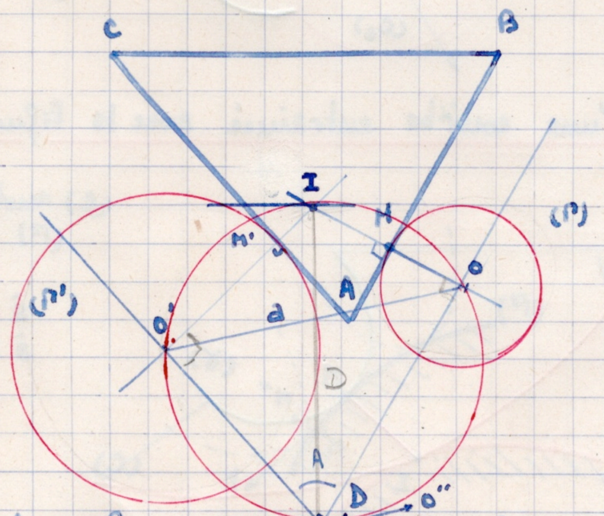


IM ⊥ AB. Traj. A → cycloïde.

M pt caractéristique.

$\overline{IA_0} = \widehat{IA} = \widehat{IM}$.
rayons ds rapport 2.

2°/ Un triangle ABC mobile dans un plan.



AB tgt (Γ).
AC tgt (Γ').

[par I : // BC → O'' fixe sur (OIO')] inutile.

par O et O' // à AC et AB.
→ D sur (OIO')
par D // BC → O'' fixe.

Enveloppe de BC ? (OO'I) cercle fixe.

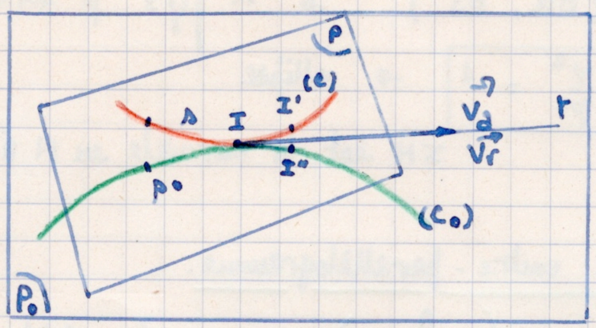
OO' = a. → a = D sin A. D = ∅ (OO'I)

O'' est fixe car $\widehat{O'IO''} = \hat{C}$.

enveloppe BC : cercle centre O''. car O''H = C^{te}. H pied de la ⊥ menée de O'' à BC

Réciproquement, le mouvement le + général d'une figure plane dans son plan peut être réalisé par le roulement sans glissement de (C) lié à (P) sur (C_0) lié à (P_0).

(C) : lieu de I ds (P)



$$\mathcal{M}^t_-(I/_{P_0}) = (I/c)(^c/c_0)$$

$$\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e}$$

I étant CIR, $\vec{V_e}$ de I = 0. $\Rightarrow$ $\vec{V_a} = \vec{V_r}$

$\vec{V_a}$ portée par tgte à (C_0) } courbes tgtes entre-elles.
$\vec{V_r}$ " " (C) } en I.

$$\frac{ds_0}{dt} = \frac{ds}{dt} \rightarrow \boxed{s = s_0}$$

Donc (C) roule sans glisser sur (C_0). Un tel mouvement est dit épicycloïdal plan.

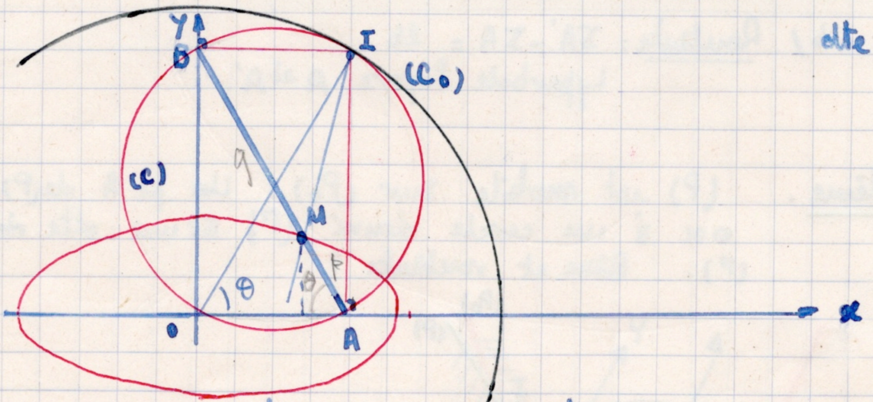
La courbe fixe (C_0) est appelée base du mouvement (lieu de I ds P_0)

La courbe (C) est la Roulante. (lieu de I ds P).

Trajectoire de M de (P) $\Rightarrow$ roulette de M.

Applications.

1°/ Mouvement à trajectoire elliptique ou de **La Hire**.



dte long. c^{te} { A sur Ox, B sur Oy.

AB = 2a.

a/ base du mouvement : cercle (O, 2a)

b/ Roulante : cercle de ø AB.
(C) tgt à (C_0).

Ts les pts du cercle décrivent des $\varnothing$.

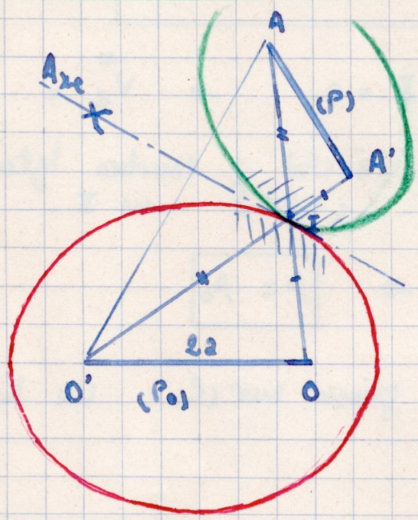
<u>Lieu d'un pt M</u> : $\left.\begin{array}{l} AM = p \\ MB = q \end{array}\right\} p + q = 2a.$

$\theta = (\widehat{Ox, OI}) \rightarrow M \begin{cases} x = q\cos\theta \\ y = p\sin\theta. \end{cases}$

$\rightarrow \boxed{\dfrac{x^2}{q^2} + \dfrac{y^2}{p^2} = 1} \rightarrow$ ellipse.

IM est la normale en M à l'ellipse.

2°/ Mouvement du contre-parallélogramme.



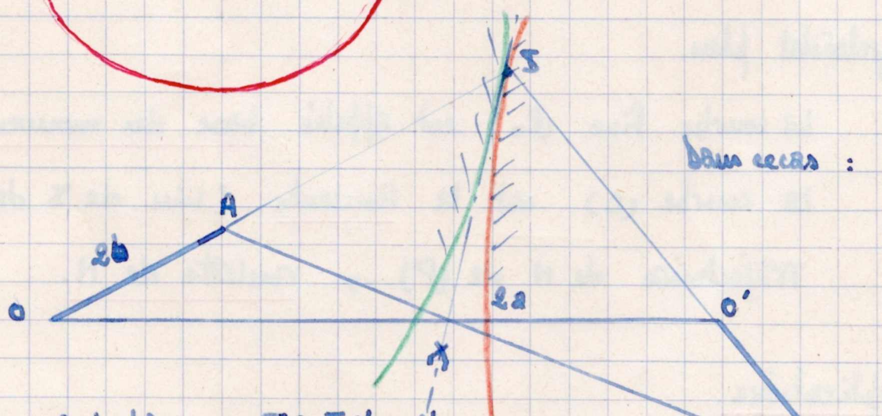
Le Pb est symétrique !

$\begin{cases} OO' = AA' = 2a \\ OA = O'A' = 2b. \end{cases}$

Dans ce cas $a < b$.

a/ <u>base</u> : $IO + IO' = \cancel{2a}\ 2b \rightarrow$ ellipse foyers O et O'

b/ <u>Roulante</u> : $IA + IA' = 2b. \rightarrow$ " " A et A'



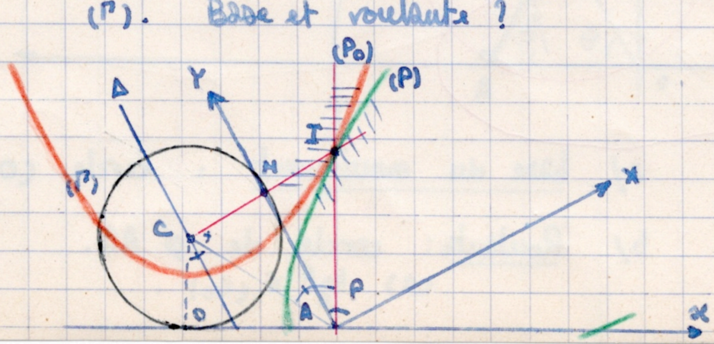
Dans ce cas : $a > b$.

a/ <u>base</u> : $IO - IO' = 2b$
hyperbole foyers O et O'

b/ <u>Roulante</u> : $IA' - IA = 2b$.
hyperbole foyers A et A'.

3°/ Problème.

(P) est mobile sur (P_0). Un pt A de (P) décrit une tgte Ox à un cercle donné (Γ) et une dte de (P) reste tgte à (Γ). Base et roulante ?

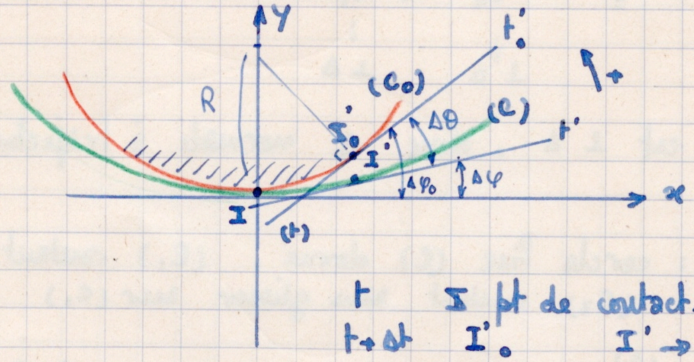


Base : (C_0) $\quad IC = IA.$

$\rightarrow$ parabole (P_0) foyer C, directrice Ox.

Roulante : $\rightarrow$ parabole (P) foyer A, directrice Δ $\parallel AY$.

Vitesse angulaire de rotation



t $\quad I$ pt de contact.

$t+\Delta t$ $\quad I'_0$ $\quad I' \rightarrow I'_0$.

Angle de rotation ds l'instant Δt : $\Delta\theta = \Delta\varphi_0 - \Delta\varphi$.

$$\Delta s_0 = \Delta s$$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi_0}{\Delta t} - \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi_0}{\Delta s_0}\cdot\frac{\Delta s_0}{\Delta t} - \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$= \left(\frac{\Delta\varphi_0}{\Delta s_0} - \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right)\underbrace{\frac{\Delta s_0}{\Delta t}}_{\rightarrow V}$$

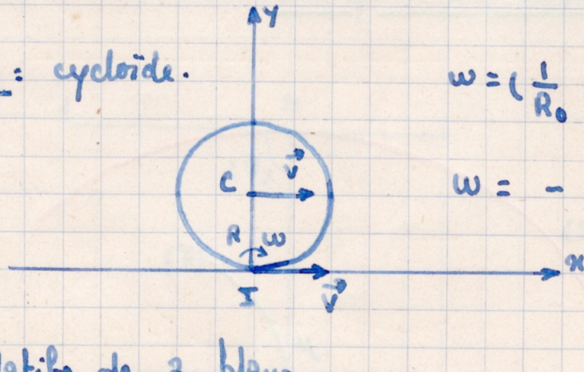
$\Delta t \rightarrow 0$ $\quad \boxed{\omega = \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right) V}$ $\quad$ cette formule est algébrique. Vraie ds ts les cas de figure.

$Ox \rightarrow$ sens + pour V

$Oy \rightarrow$ " " R, R_0. $\Big)$ ω sens + : $\widehat{Ox, Oy}$

$$\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R} = \frac{1}{K} \rightarrow \boxed{\omega = \frac{V}{K}}$$

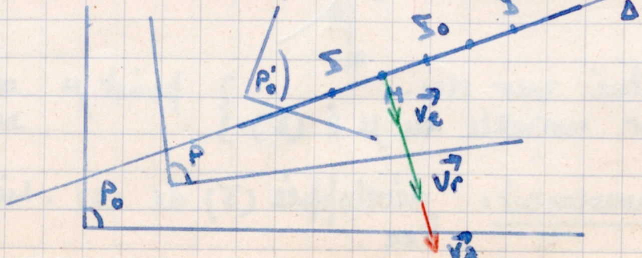
Vérification : cycloïde.



$$\omega = \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right) V.$$

$$\omega = -\frac{V}{R}$$

Mouvements relatifs de 3 plans



$P/P_0 \rightarrow I'$

$P'/P \rightarrow I_0$

$P'/P_0 \rightarrow I$.

proposition : Les 3 centres instantanés I, I', I_0 sont alignés.

$$(P'/P_0) = \underset{\text{Relatif}}{(P'/P)}\ \underset{\text{entrainement}}{(P/P_0)}.$$

$$I \qquad \underbrace{I_0 \quad I'}$$

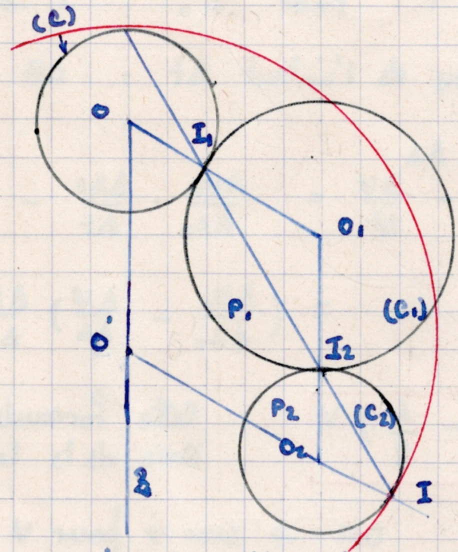
Δ dte passant par I_0 et I'.

$$\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r}$$

$$\vec{V_e} \perp \Delta \qquad \vec{V_r} \perp \Delta$$

$\vec{V_a}$ est $\perp \Delta$, donc Δ normale à trajectoire de M. Elle passe par I centre I.R.

Application : cercle fixe (C) donné. (C_1) roulant sans glisser sur (C). (C_2) roulant sans glisser sur (C_1)



$O_1 O_2$ // Oz.

mt (C_2)/(C)

CIR : Base et roulante du mt ?

$(P/P_1) \to I_1$.

$(P_1/P_2) \to I_2$.

$(P_2/P) \to I$ aligné avec I_1, I_2

I est sur (C_2).

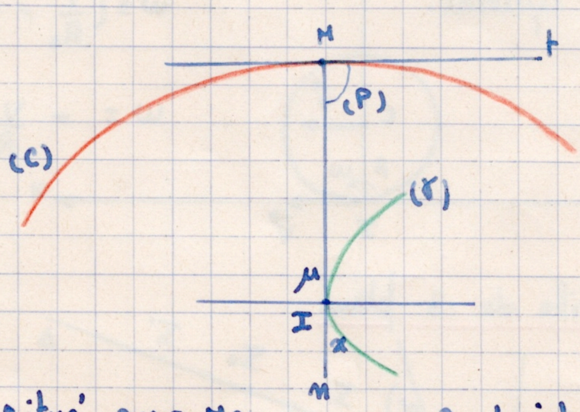
traj. $O_1 \to$ cercle (O, 2R)

Roulante : cercle (C_2) lieu de I

Base : $O'I = 3R$ si les 3 roues ont le m rayon R

Mouvement de l'équerre.

CIR
base
roulante } ?



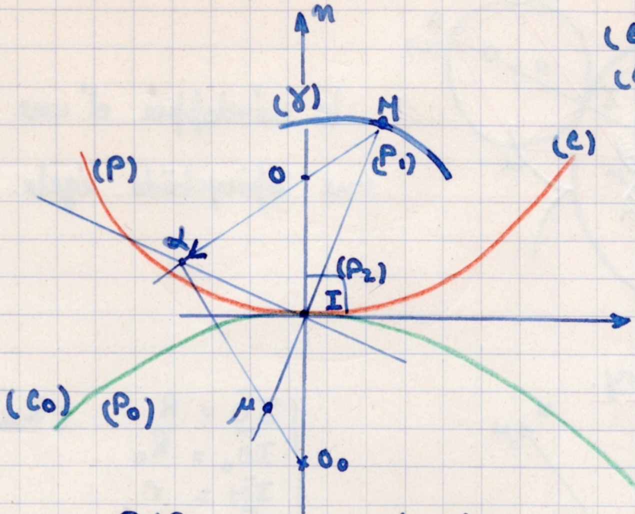
(γ) développée de C.

CIR : situé sur Mm.
sur normale en μ à (γ) } point μ centre de courbure en M.

Base du mouvement : développée (γ) de (C). Lieu de μ dans le plan fixe.

Roulante : Mn normale à (C).

Centre de courbure de la roulette d'un pt M. Const.^{on} et Formule d'Euler-Savary



(C_0) : base

(C) : roulante.

Trouver le centre de courbure μ de (γ) en M.

(P_2) plan équerre Itn.

(P_1) plan (γ).

$$\frac{P}{M} \; \frac{P_1}{\alpha} \; \frac{P_2}{O} \; P$$

a/ $P/P_1 \rightarrow M$ est cir.

$P_2/P \rightarrow O$ centre de courbure en I de (C).

$P_1/P_2 \rightarrow \alpha$ sur normale en I à MI et sur MO.

b/ $$P_0 \; \frac{\quad}{\mu} \; P_1 \; \frac{\quad}{\alpha} \; P_2 \; \frac{\quad}{O_0} \; P_0$$

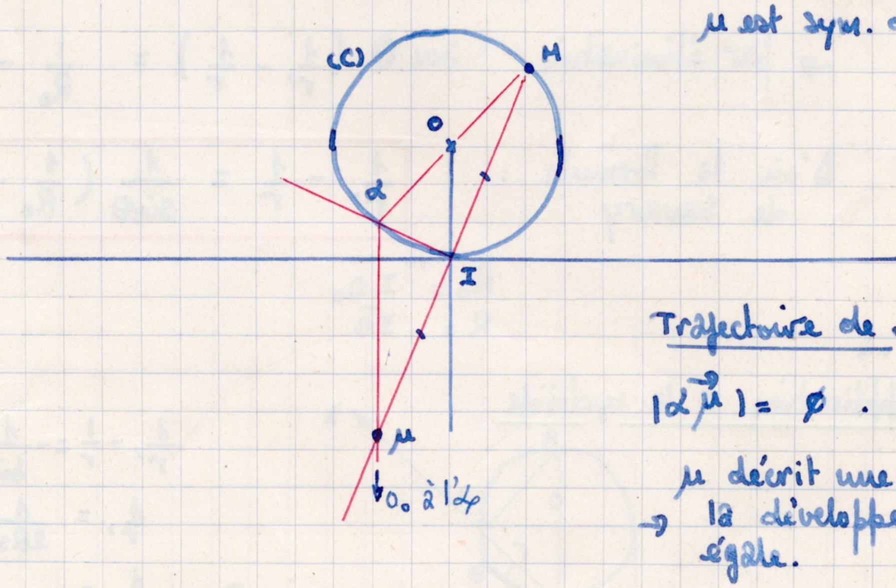
centre de courbure cherché.

Construction : $I\alpha \perp MI$. On trouve M, O, α.

On joint $\alpha O_0 \rightarrow \mu$.

Application aux cycloïdes et épicycloïdes.

μ est sym. de M / I.



Trajectoire de α : cycloïde égale.

$|\vec{\alpha\mu}| = \emptyset$.

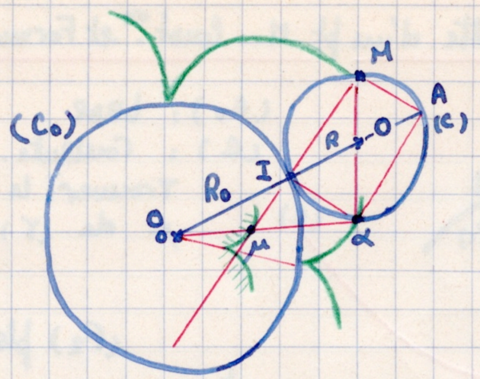
μ décrit une cycloïde égale.

$\rightarrow$ la développée est une cycloïde égale.

Développée d'une épicycloïde.

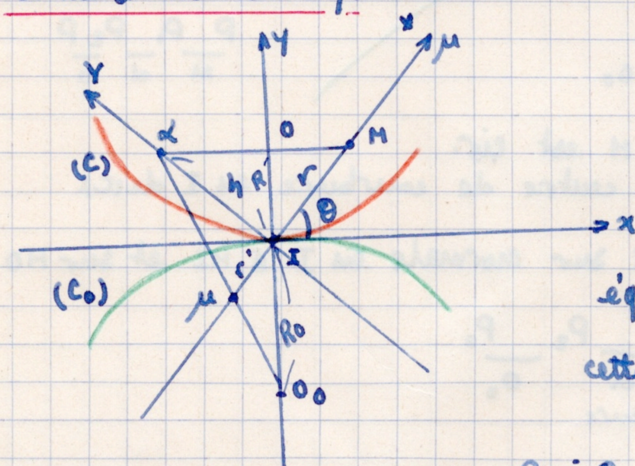
α épicycloïde
$\mu \Rightarrow$ " "
μ se déduit de α et de M par similitude.

$$\frac{\overline{O_0\mu}}{\overline{O_0\alpha}} = \frac{\overline{O_0I}}{\overline{O_0A}} = \frac{R_0}{R_0+2R} = C^{te}$$



La développée d'une épicycloïde est une épicycloïde égale.

Formule de Savary.



$$\left|\begin{array}{l} \overline{IO} = R \\ \overline{IO_0} = R_0 \\ \overline{IM} = r \\ \overline{I\mu} = r' \\ \overline{I\alpha} = h \end{array}\right. \qquad (\widehat{Ix, I\mu}) = \theta$$

équation de αM : $\frac{X}{r} + \frac{Y}{h} = 1$

cette dte passe par O $\begin{cases} R\sin\theta \\ R\cos\theta \end{cases}$

$$\frac{R\sin\theta}{r} + \frac{R\cos\theta}{h} = 1 \qquad \times -\frac{1}{R}$$

Equ. de αO_0 : $\frac{X}{r'} + \frac{Y}{h} = 1$

elle passe par $O_0 \Rightarrow \frac{R_0\sin\theta}{r'} + \frac{R_0\cos\theta}{h} = 1 \qquad \times \frac{1}{R_0}$

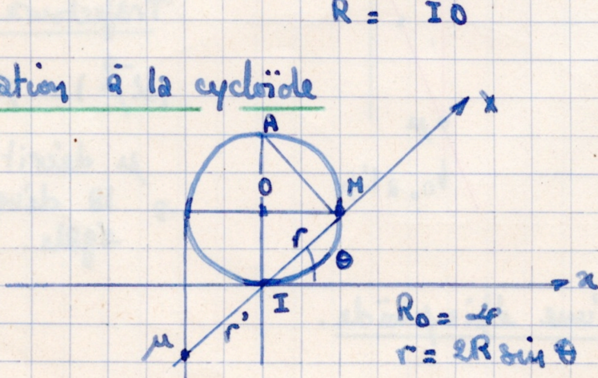
$\Rightarrow$ par élimination $\sin\theta\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}$

D'où la formule de Savary :

$$\boxed{\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right)}$$

$R_0 = \overline{IO_0}$
$R = \overline{IO}$

Application à la cycloïde



$R_0 = \infty$
$r = 2R\sin\theta$

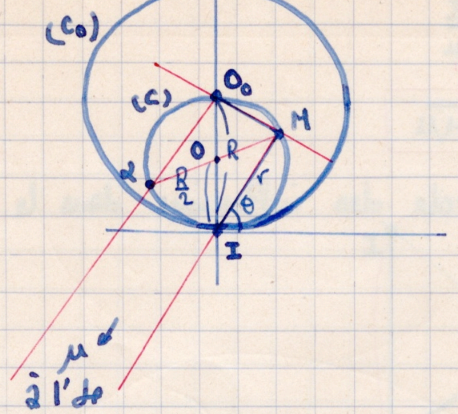
$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = -\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{R}$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{2R\sin\theta}(1-2)$$

$$\frac{1}{r'} = -\frac{1}{2R\sin\theta}$$

$$\boxed{r' = -r}$$

Application au m^t de la Hire.



$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{R} - \frac{2}{R}\right)$$

$$= -\frac{1}{R\sin\theta}$$

$r = R\sin\theta$

$\frac{1}{r'} = 0 \rightarrow r' = \infty.$

M décrit une droite

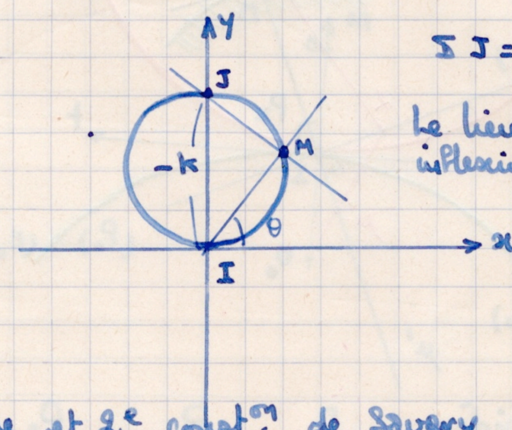
Pb : Trouver le lieu des pts du plan mobile qui sont des points d'inflexion de leur trajectoire.

M pt inflexion $\rightarrow M\mu \rightarrow \infty.$
$r' \rightarrow \infty.$

On pose : $\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R} = \frac{1}{k}$

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right).$$

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{k\sin\theta} \rightarrow \boxed{r = -k\sin\theta}$$



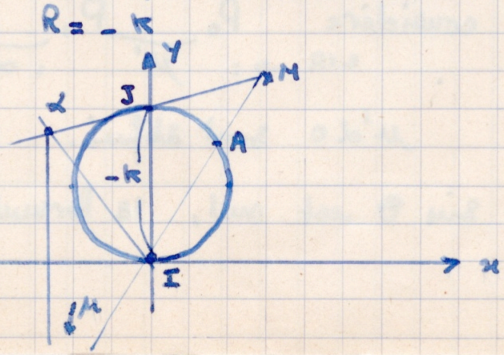
$IJ = -k.$

Le lieu cherché est le cercle des inflexions, de $\varnothing$ IJ.

2e formule et 2e const^{on} de Savary.

$$\boxed{\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{k}}$$

2e Const^{on} : $R_0 = \infty$, $R = -k$ si on connait le cercle des inflexions.

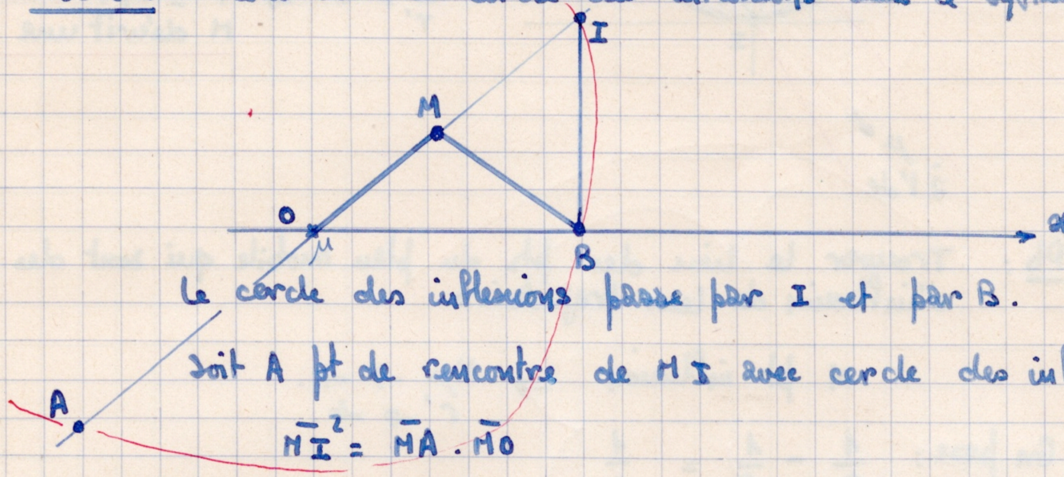


Remarque : On peut en déduire relation entre MI, MA et Mμ.

$$\frac{MA}{MI} = \frac{MJ}{M\alpha} = \frac{MI}{M\mu}$$

$$\boxed{\overline{MI}^2 = \overline{MA}.\overline{M\mu}}$$

Problème : construire le cercle des inflexions dans le système bielle-manivelle.



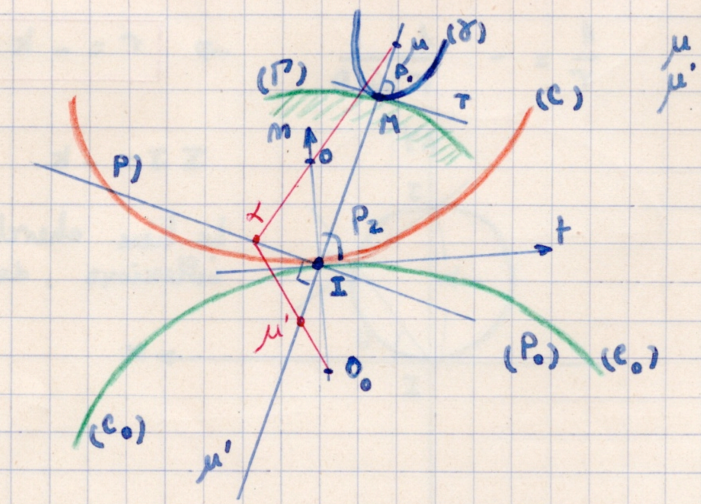
Le cercle des inflexions passe par I et par B.

Soit A pt de rencontre de MI avec cercle des inflexions.

$$\overline{MI}^2 = \overline{MA}.\overline{MO}$$

→ cercle des inflexions : cercle (IAB).

Centre de courbure de l'enveloppe (Γ) d'une courbe (γ) liée au plan mobile.



μ centre courbure de (γ).
μ' centre courbure de (Γ).

a/ On considère $P \underset{:\mu}{\_\_\_} P_1 \underset{:\alpha}{\_\_\_} P_2 \underset{:O}{\_\_\_} P$

CIR →   sur la ⊥ en I à IM

μ α O sont alignés.

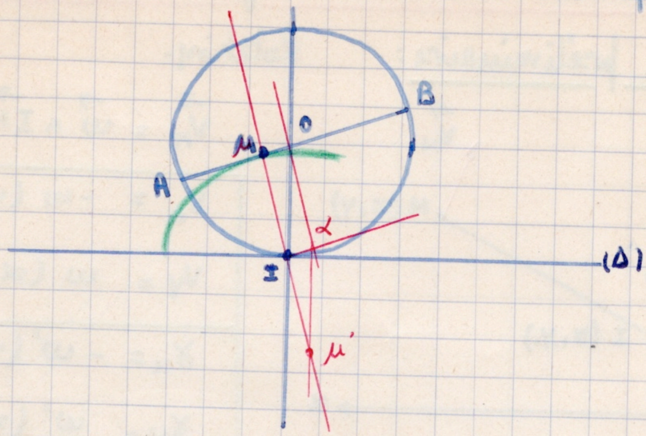
b/ On considère $P_0 \underset{\mu'}{\_\_\_} P_1 \underset{:\alpha}{\_\_\_} P_2 \underset{:O_0}{\_\_\_} P_0$

CIR → :

μ' α O sont alignés.

si sin θ est nul, la formule de Savary est en défaut.

Application à la cycloïde : centre de courbure de l'enveloppe de AB.

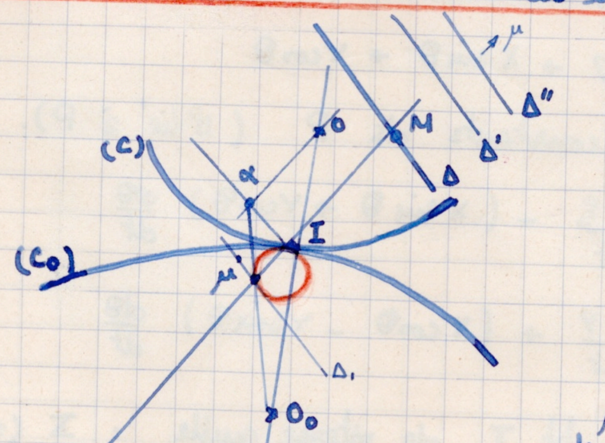


Formule de Savary : $\overline{I\mu} = r$
$\overline{I\mu'} = r'$
$\overline{IO} = R$
$\overline{IO_0} = R_0$.

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \frac{1}{\sin\theta}\underbrace{\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right)}_{\frac{1}{k}} = \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{k}$$

$\boxed{\text{cercle des inflexions : } r = -k\sin\theta.}$

Lieu des centres de courbure des enveloppes des d^tes du plan mobile (π).



$r \to \infty$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{k\sin\theta}$$

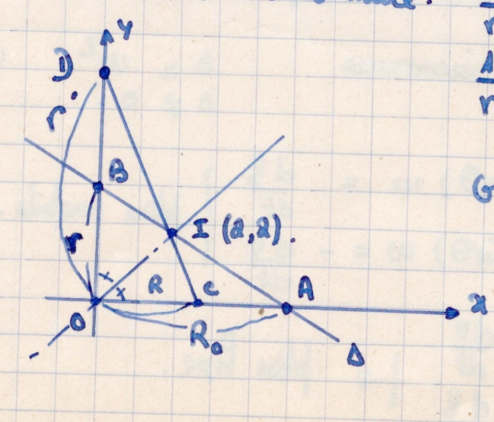
$r' = k\sin\theta$: cercle des rebroussements.

μ' est p^t de rebroussement de l'enveloppe de $\Delta_1 \parallel \Delta$ passant par μ'.

La construction de Savary tombe en défaut pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

On utilise alors la formule : $\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}$.

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{r}.$$



On connait $r, R_0, R \to r'$.

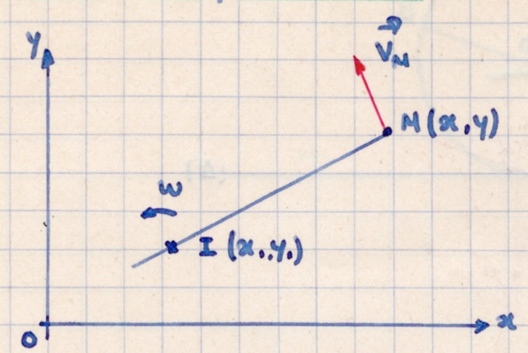
$AB \to \frac{a}{R_0} + \frac{a}{r} = 1.$

$CD \to \frac{a}{R} + \frac{a}{y} = 1$

$\to \boxed{y = r'}$

Etude analytique du m^t d'une fig. plane dans son plan.

1/ Remarque préliminaire : Rotation.

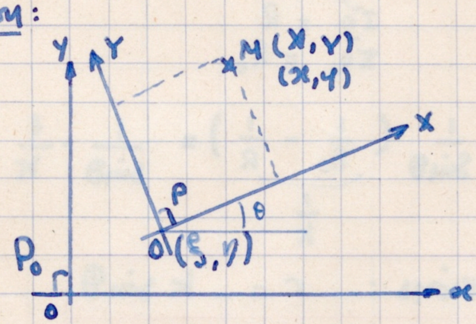


$\vec{V}_M = \vec{\omega} \wedge \vec{IM}$ $\quad \vec{\omega} \to (0, 0, \omega)$, $\vec{IM} \to (x - x_1, y - y_1 ; 0)$

$$\boxed{\begin{aligned} V_x &= -\omega (y - y_1) \\ V_y &= \omega (x - x_1). \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma_x &= -\omega' (y - y_1) - \omega^2 (x - x_1) \\ \gamma_y &= \omega' (x - x_1) - \omega^2 (y - y_1). \end{aligned}}$$

Application :



$$M \left| \begin{aligned} x &= \xi + X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y &= \eta + X\sin\theta + Y\cos\theta \end{aligned} \right.$$

X et Y sont constants ds P (M lié à P).

$$(I) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\xi}{dt} - (X\sin\theta + Y\cos\theta)\dfrac{d\theta}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d\eta}{dt} + (X\cos\theta - Y\sin\theta)\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases} \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

cherchons un pt I de vitesse nulle : I (x_1, y_1).
(X_1, Y_1).

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} - (X\sin\theta + Y\cos\theta)\,\omega = 0 \\ \dfrac{d\eta}{dt} + (X\cos\theta - Y\sin\theta)\,\omega = 0 \end{cases}$$

2 éq à 2 inconnues $\quad \Delta = \omega^2 \quad \omega \neq 0.$
$\Delta \neq 0.$

$$\text{I} \;\; (II) \begin{cases} (X_1\sin\theta + Y_1\cos\theta)\,\omega = \dfrac{d\xi}{dt} \\ (X_1\cos\theta - Y_1\sin\theta)\,\omega = -\dfrac{d\eta}{dt} \end{cases} \text{ plan mobile.}$$

$$(III) \begin{cases} x_1 = \xi - \dfrac{1}{\omega}\cdot\dfrac{d\eta}{dt} \\ y_1 = \eta + \dfrac{1}{\omega}\cdot\dfrac{d\xi}{dt} \end{cases} \to \text{ plan fixe.}$$

$$\vec{V}_M \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\xi}{dt} - (y-\eta)\,\omega \,. & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d\eta}{dt} + (x-\xi)\,\omega \,. & (2) \end{cases}$$

pl. mob. $V_I = 0$

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{d\xi}{dt} - (y_1-\eta)\,\omega \,. & (1') \\ 0 = \dfrac{d\eta}{dt} + (x_1-\xi)\,\omega \,. & (2') \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -(y-y_1)\,\omega \\ \frac{dy}{dt} &= (x-x_1)\,\omega \end{aligned}}$$

m̄ distribution que ds rotation de centre I et de v.a : ω.

Base du mouvement : lieu de I dans le plan fixe.

Base :
$$\begin{cases} x_1 = \xi - \dfrac{1}{\omega}\cdot\dfrac{d\eta}{dt} \\ y_1 = \eta + \dfrac{1}{\omega}\cdot\dfrac{d\xi}{dt} \end{cases}$$

Roulante :
$$\begin{cases} (x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta)\,\omega = \dfrac{d\xi}{dt}\,. \\ (x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta)\,\omega = -\dfrac{d\eta}{dt}\,. \end{cases}$$

Distribution des accélérations :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\xi}{dt} - (y-\eta)\,\omega \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d\eta}{dt} + (x-\xi)\,\omega \end{cases}$$

$$\vec{\gamma} \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d^2\xi}{dt^2} - (y-\eta)\,\omega' - \omega\dfrac{d\eta}{dt} - 2\,\omega^2(x-\xi)\,. & (3) \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^2\eta}{dt^2} + (x-\xi)\,\omega' + \omega\dfrac{d\xi}{dt} - 2\,\omega^2(y-\eta) & (4). \end{cases}$$

J $(x_2 \cdot y_2)$

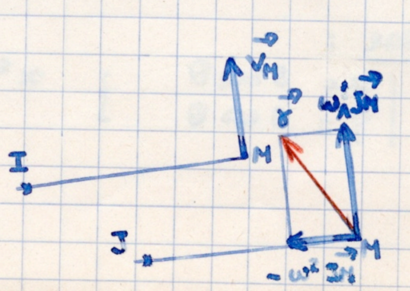
$$\vec{\gamma}_J \begin{cases} 0 = \dfrac{d^2\xi}{dt^2} - (y_2-\eta)\,\omega' - \omega\dfrac{d\eta}{dt} - 2\omega^2(x_2-\xi) & (3') \\ 0 = \dfrac{d^2\eta}{dt^2} + (x_2-\xi)\,\omega' + \omega\dfrac{d\xi}{dt} - 2\omega^2(y_2-\eta) & (4'). \end{cases}$$

$\Delta \neq 0$ en général.
→ 1 solution.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -(y-y_2)\,\omega' - \omega^2(x-x_2) & (3)-(3') \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = (x-x_2)\,\omega' - \omega^2(y-y_2) & (4)-(4'). \end{cases}$$

La distribution des acc. est la m̄ que ds une rotation de centre J et de vitesse angulaire ω.

Vectoriellement



$$\boxed{\vec{V}_M = \vec{\omega} \wedge \vec{IM}}$$

$$\boxed{\vec{\gamma} = \vec{\omega}' \wedge \vec{JM} - \omega^2 \cdot \vec{JM}}$$

$\omega' = 0$ → rotation uniforme.

J_0 centre géométrique des accélérations

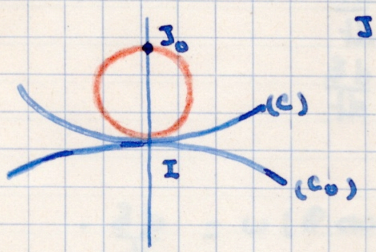
$$\vec{\gamma} = -\omega^2 . \vec{J_0 M}$$

si on fait varier ω' en laissant ω cste, J est variable. Lieu ?

$$\vec{\gamma}_J = 0 \left| \begin{array}{l} \gamma_t = 0 \\ \gamma_n = \dfrac{V^2}{R} = 0 \qquad V \neq 0. \rightarrow R \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

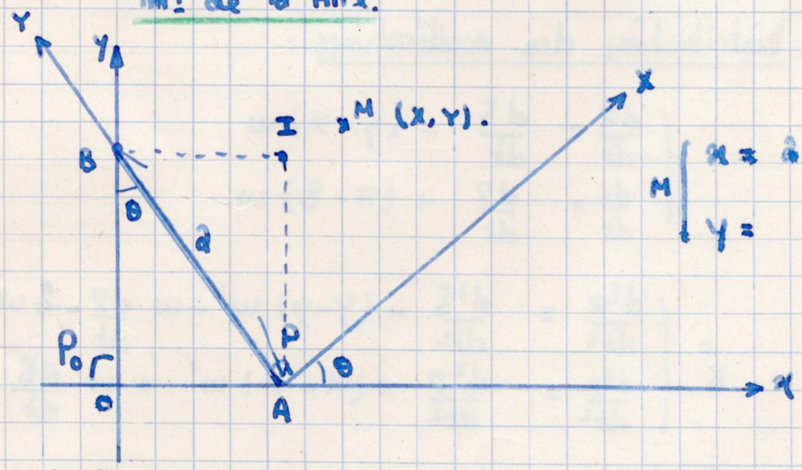
J est pt inflexion → lieu = cercle des inflexions.

J_0 ϕement opposé à I.



Applications :

1°/ retrouver analytiquement CIR, base et roulante du mt de la Hire.



$$M \left| \begin{array}{l} x = a \sin\theta + X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta. \end{array} \right.$$

a/ CIR

$$I \left| \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = \left[a\cos\theta - (X\sin\theta + Y\cos\theta) \right] \omega = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = (X\cos\theta - Y\sin\theta)\,\omega = 0 \end{array} \right.$$

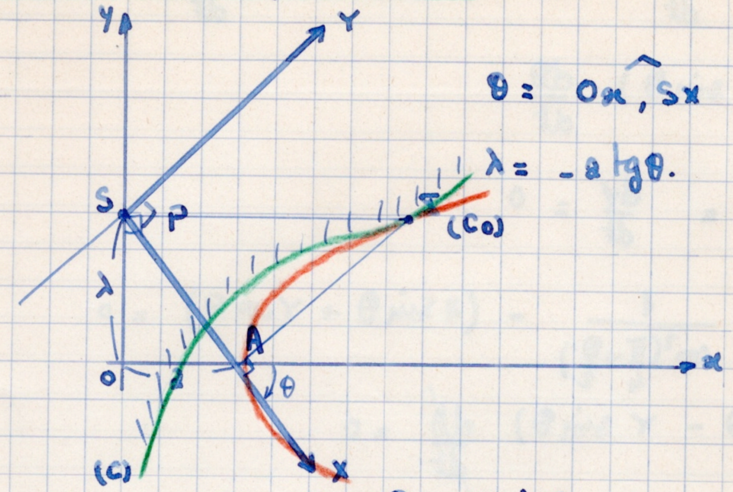
b/ Roulante :

$$\left| \begin{array}{l} X\cos\theta - Y\sin\theta = 0 \qquad \rightarrow \operatorname{tg}\theta = \dfrac{X}{Y} \\ X\sin\theta + Y\cos\theta = a\cos\theta \quad \rightarrow \operatorname{cotg}\theta = \dfrac{X}{a-Y} \end{array} \right\} \begin{array}{l} X^2 + Y^2 - aY = 0 \\ \text{cercle } \phi \text{ AB.} \end{array}$$

c/ Base :

$$\left| \begin{array}{l} x = a\sin\theta \\ y = a\cos\theta \end{array} \right\} \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

2°/ Mouvement d'une équerre SXY.



$\theta = \widehat{Ox, SX}$

$\lambda = -a\,tg\theta.$

$$M \left| \begin{array}{l} x = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = -a\,tg\theta + X\sin\theta + Y\cos\theta. \end{array} \right.$$

$$\vec{V}_M \left| \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -(X\sin\theta + Y\cos\theta)\,\omega \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{a}{\cos^2\theta}\,\omega + (X\cos\theta - Y\sin\theta)\,\omega. \end{array} \right.$$

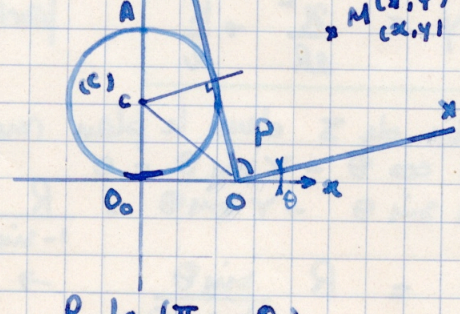
$$\begin{array}{c} I \\ \text{pl. mobile.} \end{array} \left| \begin{array}{l} 0 = X\sin\theta + Y\cos\theta. \\ 0 = X\cos\theta - Y\sin\theta - \dfrac{a}{\cos^2\theta}. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} I \\ \text{plan fixe} \end{array} \left| \begin{array}{l} y = -a\,tg\theta \\ x = \dfrac{a}{\cos^2\theta} = a(1 + tg^2\theta) \end{array} \right.$$

__Base__ : $x = a + \dfrac{y^2}{a} \rightarrow$ parabole. (C_0).

__Roulante__ : $r = \dfrac{a}{\cos^2\theta}$: (C)

__Exercice__ :



CIR
base
roulante } ?

$$\overline{O_0O} = R\,tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\left| \begin{array}{l} x = R\,tg\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}\right) + X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta \end{array} \right.$$

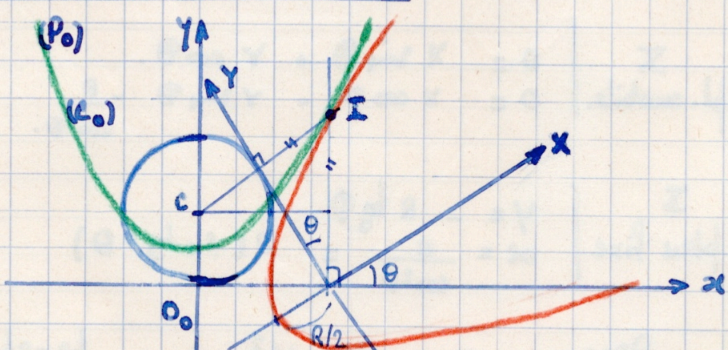
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2} R \dfrac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})} \dfrac{d\theta}{dt} - (x \sin\theta + y \cos\theta) \dfrac{d\theta}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} = (x \cos\theta - y \sin\theta) \dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

CIR : $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt} = 0$.

$$\rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{2} R \dfrac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})} - (x \sin\theta + y \cos\theta) = 0 \\ (x \cos\theta - y \sin\theta) \cancel{\dfrac{d\theta}{dt}} = 0 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{x_1 = R \,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right).} \\ \boxed{y_1 = \frac{1}{2} R \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})} = \frac{R}{1-\sin\theta}} \end{array}\right\} I \rightarrow \text{CIR}.$$

d'où la construction de I (CIR)



Base : Lieu de I dans le plan fixe.

$$1 + \frac{x^2}{R^2} = \frac{2y}{R}$$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{2R} + \frac{R}{2}}$$ parabole (P_0)

Roulante : Lieu de I dans le plan mobile.

$$\begin{cases} x \cos\theta - y \sin\theta = 0 \\ x \sin\theta + y \sin\theta = \dfrac{R}{1-\sin\theta} \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cos\theta \\ \sin\theta \end{array} \right.$$

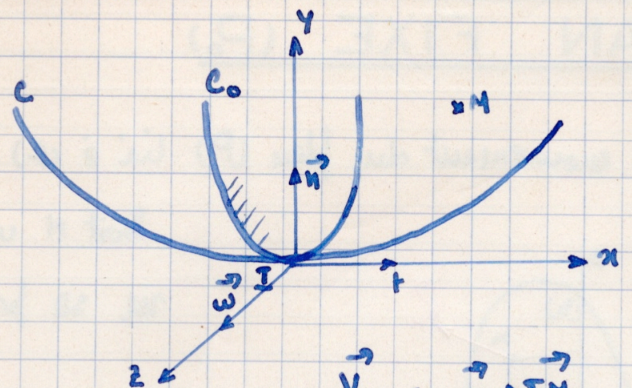
$$x = R \frac{\sin\theta}{1-\sin\theta} \rightarrow \sin\theta = \frac{X}{R+X}$$

$$x^2 \cos^2\theta = y^2 \sin^2\theta$$

$$x^2 \left(1 - \frac{x^2}{(R^2+x^2)^2}\right) = y^2 \frac{x^2}{(R+x)^2}$$

$$\rightarrow \boxed{y^2 = R^2 + 2R x}$$ Parabole (P).

Remarques complémentaires.



$$|\vec{V_I}| = \omega k \rightarrow \left(\frac{1}{k} = \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right).$$

$$\vec{V_M} = \vec{\omega} \wedge \vec{IM} \qquad \vec{IM} = \vec{OM} - \vec{OI}$$

$$\vec{\gamma_M} = \vec{\omega}' \wedge \vec{IM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{V_M} - \vec{V_I})$$

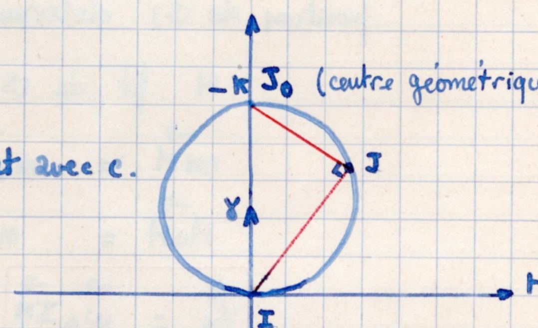
$$\vec{\gamma_M} = \vec{\omega}' \wedge \vec{IM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{IM} - \omega k \vec{t})$$

$$\boxed{\vec{\gamma_M} = \vec{\omega}' \wedge \vec{IM} - \omega^2 \vec{IM} - \omega^2 k \vec{n}}$$

Au pt I : $IM = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\gamma_I} = -\omega^2 k \vec{n} \\ \gamma_I = \omega^2 . IJ_0 \end{array}}$$

ds le m^t d'entrainement avec c.



Si $\gamma_M = 0$ centre des accélérations.

On a $0 = \vec{\omega}' \wedge \vec{JM} - \omega^2 (\vec{IJ} - \vec{IJ_0})$.

$0 = \vec{\omega}' \wedge \vec{JM} - \omega^2 \vec{J_0 J}$

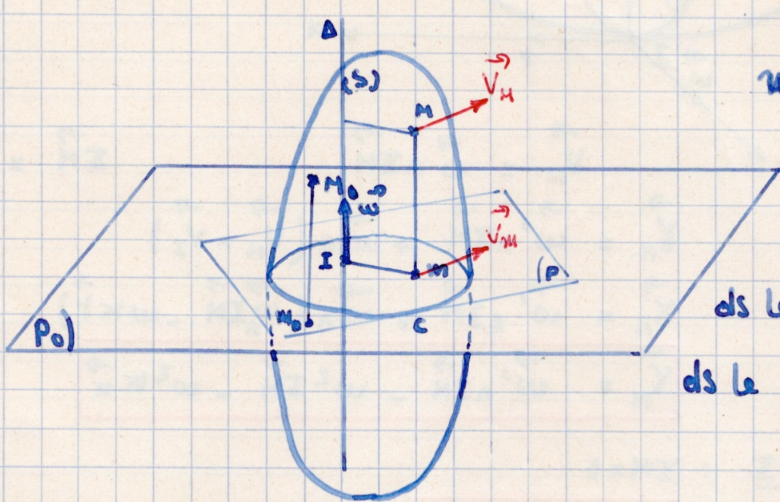
$\vec{J_0 J} \perp \vec{JM}$.

MOUVEMENT d'un SOLIDE parallèlement A UN PLAN FIXE (P_0)

Il suffit d'étudier le mouvement du plan (P) lié à (C) ds (P_0).

Soit M un pt de S.

m sa projection sur (P_0).



Distribution des vitesses ds le solide (S) = distribution ds le plan (P).

position de (S) determinée par (C).

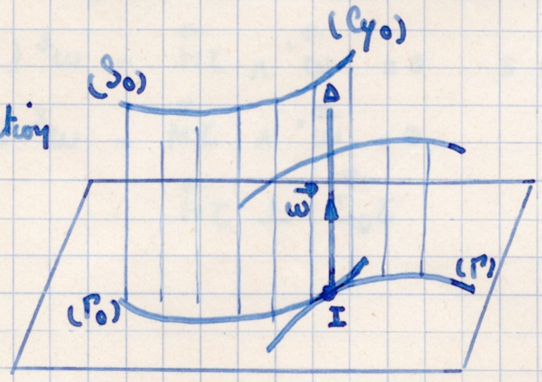
M pt de (S) . m projection sur (P).

$\vec{mM} = \vec{m_0 M_0}$

$\vec{M_0 M} = \vec{m_0 m} \rightarrow \vec{V}_M = \vec{V}_m$

$\boxed{\vec{V}_M = \vec{\omega} \wedge \vec{IM}}$

Il existe 1 centre de rotation I et 1 axe de rotation Δ passant par I.



Lieu de (Δ) ds (S_0) → Cy_0

Lieu de (Δ) ds (S) → Cy. (Γ).

Le m^t le + général d'un corps solide lié à 1 pt. fixe peut être réalisé en faisant glisser un cylindre (C) lié à (S) sur un cylindre fixe (C_0) lié à (S_0)

surfaces axoïdes du mouvement.