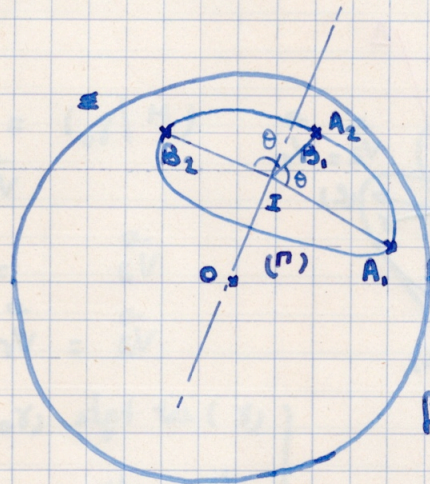


MOUVEMENT d'une figure plane autour d'un point fixe

Théorème 1: On peut passer d'une position (F_1) à une position (F_2) d'une fig. (F) mobile autour de O fixe par une rotation autour de A passant par O .



$$F_1 \rightarrow OA_1B_1$$

$$F_2 \rightarrow OA_2B_2$$

$A_1 \rightarrow$ position finale A_2 .

$B_1 \rightarrow$ " " B_2 .

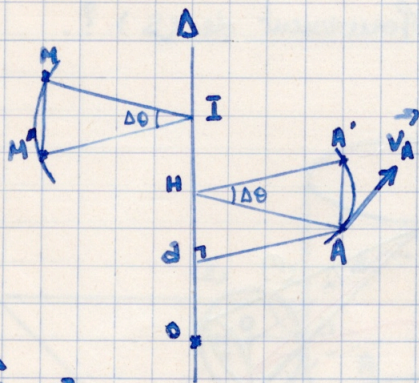
cercle $(F^1) \rightarrow A_1, A_2, B_2 \rightarrow$ son axe Δ

fait coïncider F_1 et F_2 .

Théorème 2: Soit un déplacement ϵ^t petit de (F) .

$$(F_t) \rightarrow (F_{t+\Delta t})$$

$$(F_t) \rightarrow (F_{t'})$$



$$\frac{AA'}{AH} = \frac{MM'}{IM} = 2 \sin \frac{\Delta\theta}{2} \sim \Delta\theta$$

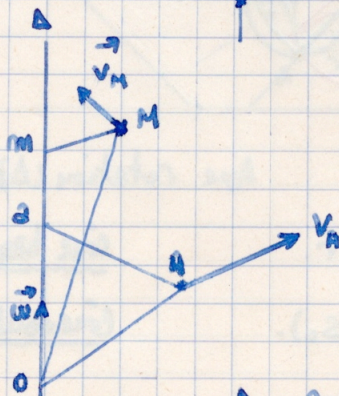
$$\frac{\overline{AA'}}{\Delta t} = \frac{\overline{MM'}}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}_M = \omega$$

$$|\vec{V}_A| = \omega \cdot \overline{AA'}$$

$$V_M = \omega \cdot \overline{MM'}$$

$$\vec{V}_M = \omega \wedge \vec{OM}$$



Δ axe instantané de rotation.
 $\vec{\omega}$ rotation instantanée.

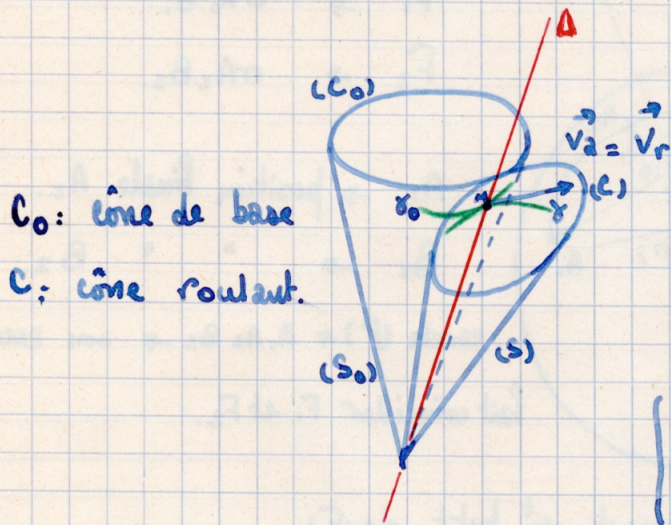
Base et Roulements du mouvement.

Soit (C_0) le lieu de Δ dans l'espace fixe (S_0) .
 Soit (C) " " " " " " (S) . (solide mobile)

Δ axe instantané de rotation.

→ (C) roule sans glisser sur le cône fixe (C_0) .

a / Les 2 cônes sont tgts le long de (Δ)



C_0 : cône de base
 C : cône roulant.

$$(M/\gamma_0) = (M/\gamma) (\gamma/\gamma_0).$$

$$\vec{v}_e = 0 \rightarrow (M \text{ sur } \Delta)$$

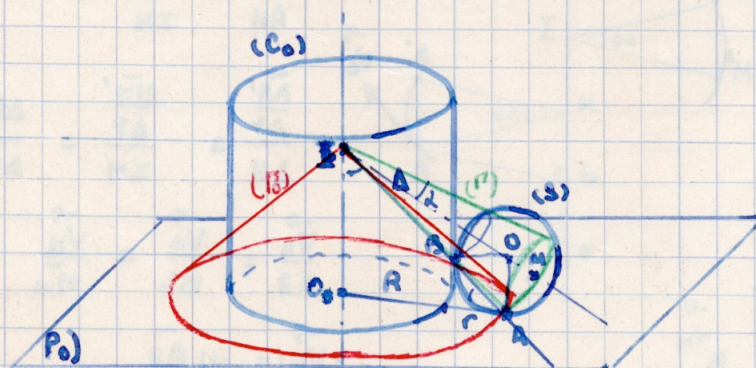
$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r$$

(γ) est tgte (γ_0) en $M \rightarrow (C_0)$ et (C) tgts en M
 $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\beta_0}{dt}$. roulement sans glissement de r sur r_0 , donc de C sur C_0 .

mouvement épicycloïdal sphérique.

Application: une sphère (S) roule sans glisser sur (P_0) et cylindre fixe (C_0) . mouvement de (S) ?



a / $v_A = v_B = 0$.

Axe rotation (Δ)

$$OI = QA = R + r.$$

cône base: sommet I, rayon $R+r$

$$(I/S_0) = (I/S) (S/S_0).$$

cône roulant: sommet I, $\frac{1}{2}$ angle α .

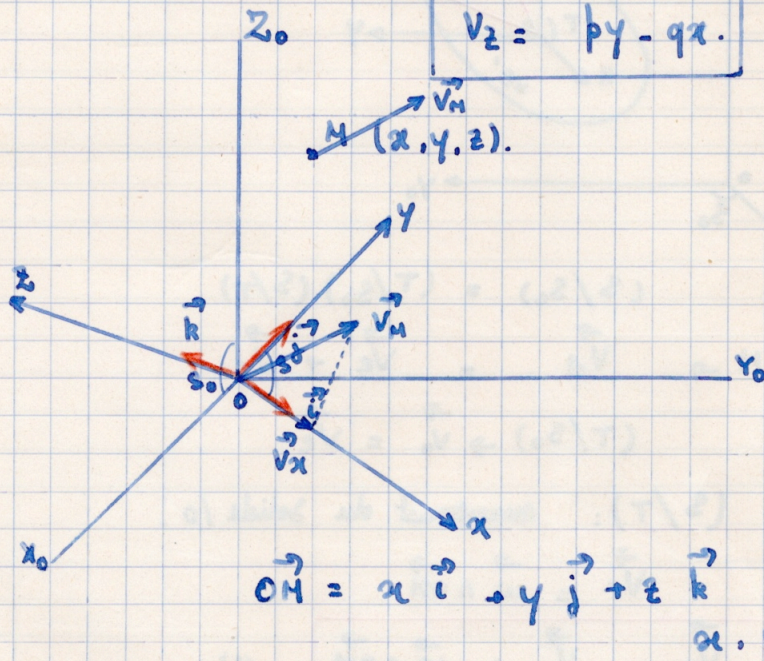
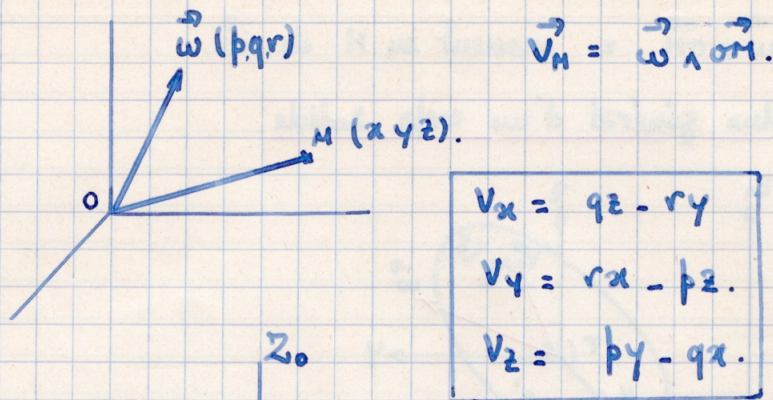
$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r.$$

$$\downarrow 0$$

$$\downarrow 0$$

$$\rightarrow v_e = 0 \rightarrow I \text{ fixe dans } (S).$$

Etude analytique..



	Ox_0	Oy_0	Oz_0
\vec{i}	α	β	γ
\vec{j}	α'	β'	γ'
\vec{k}	α''	β''	γ''

$x_0 = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z$

$\vec{V}_M = x \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + y \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + z \cdot \frac{d\vec{k}}{dt}$

projetons \vec{V}_M sur les axes mobiles.

$\bar{V}_x = (\vec{i} \cdot \vec{V}_M) = x \left(\vec{i} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} \right) + y \left(\vec{i} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} \right) + z \left(\vec{i} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right)$

$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$
 $(\vec{i} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt}) = 0$
 $(\vec{j} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt}) = 0$
 $(\vec{k} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt}) = 0$
 $(\vec{i} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt}) + (\vec{j} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt}) = 0$
 $(\vec{j} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt}) + (\vec{k} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt}) = 0$
 $(\vec{k} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt}) + (\vec{i} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt}) = 0$

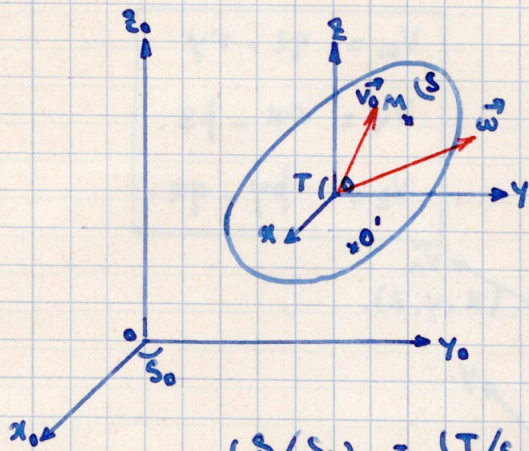
$$\left. \begin{aligned} V_x &= qz - ry \\ V_y &= rx - pz \\ V_z &= py - qx \end{aligned} \right\} \vec{V}_M = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

$$\vec{\omega} \begin{cases} p = \vec{k} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} \\ q = \vec{i} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \\ r = \vec{j} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} \end{cases}$$

La distribution des vitesses est la même que dans un m^3 de rotation de vitesse angulaire $\vec{\omega}(p, q, r)$.

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \wedge \vec{OM} = \text{moment en M de } \vec{\omega}.$$

Mouvement le plus général d'un corps solide.



$$(S/S_0) = (T/S_0)(S/T)$$

$$M \rightarrow \vec{V}_M = \vec{V}_O + \vec{V}_r$$

$$(T/S_0) \rightarrow \vec{V}_O = \vec{V}_e$$

(S/T): mouvement du solide / o.

$$\vec{V}_r = \vec{\omega} \wedge \vec{O'M}$$

$$\vec{V}_M = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{OM} \quad (1)$$

Le vecteur $\vec{\omega}$ est indépendant de o. Montrons le:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_{O'} + \vec{\omega}' \wedge \vec{O'M}$$

$$\vec{V}_{O'} = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{OO'} \quad \text{en appliquant (1) à } O'$$

$$\vec{V}_M = \vec{V}_O + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{OO'}}_{= \vec{\omega} \wedge \vec{O'M} + \vec{\omega} \wedge \vec{MO'}} + \vec{\omega}' \wedge \vec{O'M}$$

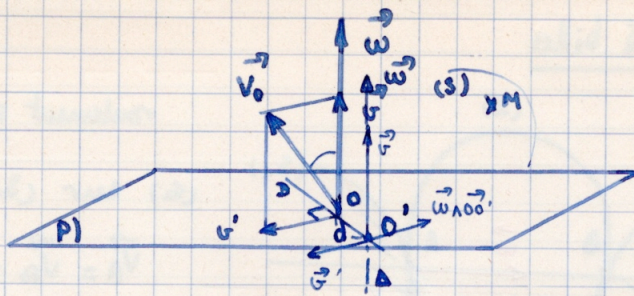
$$\vec{V}_M = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{O'M} + \vec{\omega} \wedge \vec{MO'} + \vec{\omega}' \wedge \vec{O'M}$$

$$\vec{V}_M = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{O'M} + \underbrace{(\vec{\omega}' - \vec{\omega}) \wedge \vec{O'M}}_{= 0 \text{ quelque soit M.}}$$

$$\rightarrow \underline{\vec{\omega} = \vec{\omega}'}$$

La rotation instantanée $\vec{\omega}$ est indépendante du chemin du pt o.
C'est une caractéristique du mouvement.

On peut choisir le pt O' tel que les vecteurs $\vec{\omega}$ et \vec{V}_O soient colinéaires.



$$\vec{V}_{O'} = \vec{v} + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{OO'}$$

Choisir O tel que $\vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{OO'} = 0$

Il suffit que le trièdre $(T) [\vec{\omega}, \vec{v}', \vec{OO'}]$ soit direct.

$$d\omega = v'$$

$$\vec{V}_{O'} = \vec{v}$$

$$\vec{V}_M = \vec{v} + \vec{\omega} \wedge \vec{O'M}$$

La distribution des vitesses est la même que dans un mouvement hélicoïdal d'axe Δ

- $\vec{T} = \vec{v}$ translation.
- $\vec{\omega}$: vecteur rotation.

Mouvement hélicoïdal tangent.

\vec{V}_M : moment en M.

(T) { résultante générale $\vec{\omega}$
 M! en O' $\vec{v} = \vec{T}$.

Δ = axe central du torseur (T).

A | si $V_A = V_B = 0$.

A $\vec{\omega}$ On en déduit $\vec{T} = 0$
 B } $\vec{\omega}$ passe par A et B } rotation d'axe AB.

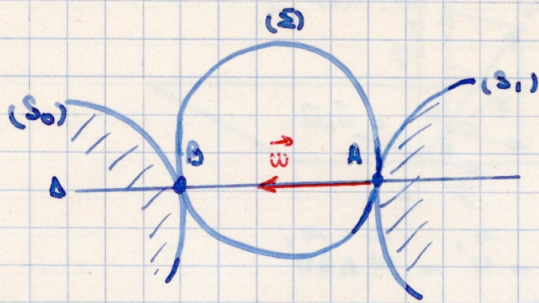
Cas particuliers

* $\vec{v} = \vec{T} = 0 \rightarrow \text{rot } \omega / (\Delta)$

* $\omega = 0 \rightarrow \text{Translation}$

$V_A = V_B = 0 \quad T = 0 \quad \vec{\omega}$ porté par AB.

Cas des roulements à billes

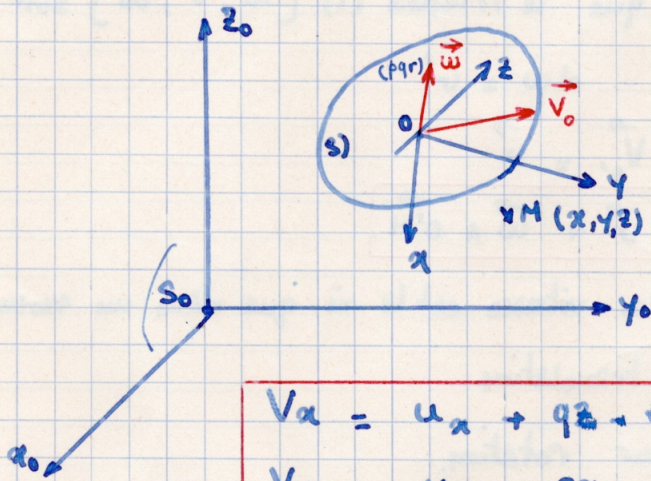


roulement sans glissement de (S) sur (S₀) et (S₁).

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = 0.$$

→ $\vec{\omega}$ sur AB.

Etude analytique.



$\vec{\omega} (p, q, r)$ sur axes mobiles

$$\vec{v}_0 \begin{cases} u_x \\ u_y \\ u_z \end{cases}$$

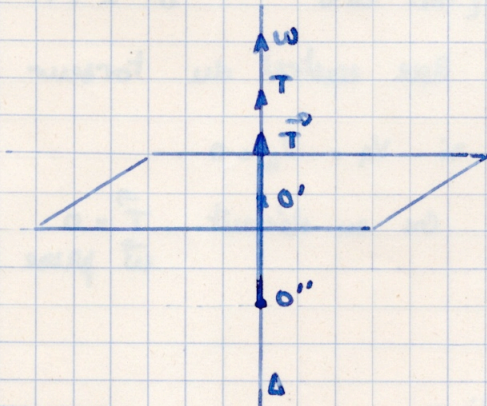
$$\vec{v}_M = \vec{v}_0 + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{OM}}_{qz - ry}$$

$$\begin{aligned} V_x &= u_x + qz - ry \\ V_y &= u_y + rx - pz \\ V_z &= u_z + py - qx \end{aligned}$$

Axes mobiles.

M(x, y, z).

Axe hélicoïdal: A tout pt de cet axe \vec{v} et $\vec{\omega}$ sont colinéaires.



$$\frac{V_x}{p} = \frac{V_y}{q} = \frac{V_z}{r}$$

Si O est sur Δ, $\vec{v}_O = \vec{T} = h\vec{\omega}$

$$\begin{aligned} V_x &= hp + qz - ry \\ V_y &= hq + rx - pz \\ V_z &= hr + py - qx \end{aligned}$$

Mouvement continu d'un corps solide.



Δ axe hélicoïdal.

(\mathcal{E}_0) lieu de Δ de (S_0) .

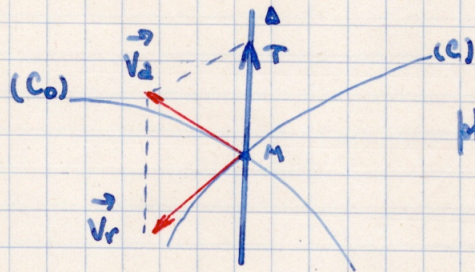
(\mathcal{E}) lieu de Δ de (S) .

(\mathcal{E}) et (\mathcal{E}_0) se raccordent le long de (Δ) .

(m pt tqt en M).

$$(M/C_0) = (M/C) (C/C_0)$$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$



M tqt en M à $\mathcal{E} \rightarrow (\Delta, V_r)$

" " $(\mathcal{E}_0) \rightarrow (\Delta, V_e)$.

Le mouvement de $(\mathcal{E})/(\mathcal{E}_0)$ est un roulement sans glissement autour de Δ , avec un vecteur translation $\vec{T} \rightarrow$ glissement.

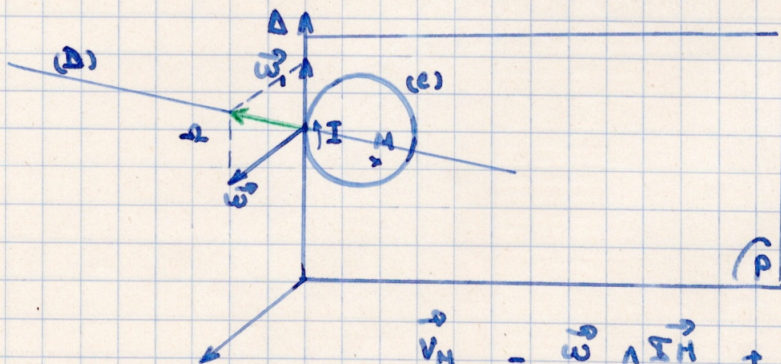
$\Delta =$ axe de viration.

Exemple: Un cercle (C) roule sans glisser sur un axe Δ d'un plan P.

$$C/\Delta \rightarrow \vec{\omega}$$

$$P/\Delta \rightarrow \vec{\omega}_1$$

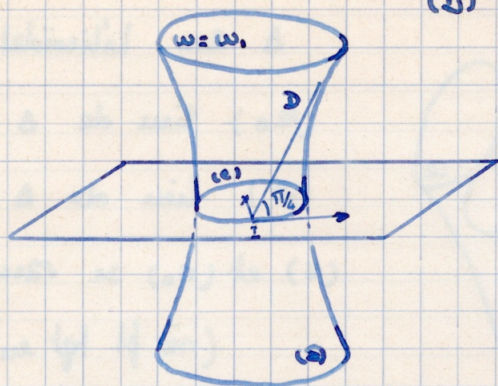
Etudier le mt continu de C. Surfaces ovoïdes ?



$$\vec{V}_M = \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{IM}}_{V_r} + \underbrace{\vec{\omega}_1 \wedge \vec{IM}}_{V_e} = (\vec{\omega} + \vec{\omega}_1) \wedge \vec{IM} = \vec{\Omega} \wedge \vec{IM}$$

rotation instantanée autour de (I).

(D) décrit un hyperboloïde de révolution.



(Z) \rightarrow hyperboloïde de révolution

(Z₀) \rightarrow hélicoïde oblique.

on peut faire rouler sans glisser l'hyperboloïde sur l'hélicoïde.

COMPOSITION des ACCELERATIONS

Problème : On connaît mouvement de M / solide (S). (relatif).
 et le mouvement de (S) / (S₀) (entraînement).

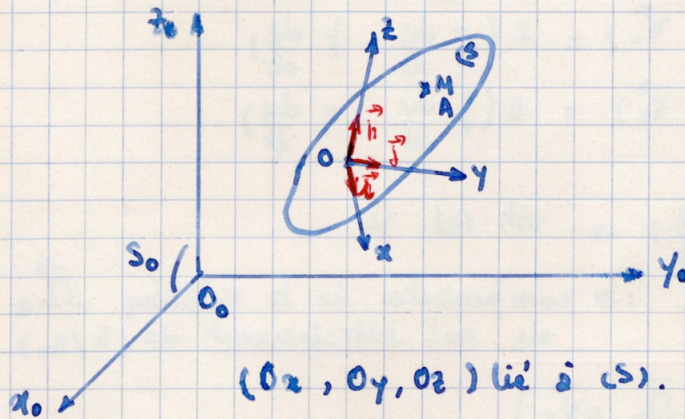
Étudier M / (S₀).

On appelle :

- Vitesse relative : $\vec{V}_r \rightarrow \vec{\gamma}_r$: acc.^m ds m. rel.³
- Vitesse entraînement : $\vec{V}_e \rightarrow \vec{\gamma}_e$: acc.^m de A (S/S₀)
- v. absolue : $\vec{V}_a \rightarrow \vec{\gamma}_a$: acc.^m absolue (M/S₀).

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

En général, $\vec{\gamma}_a \neq \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_r$



M mobile ds (S) → relatif
 (S) " / (S₀) → entr!

(O_x, O_y, O_z) lié à (S).

(x, y, z) coordonnées de M ds (S)

$$\vec{O}_0 M = \vec{O}_0 O + x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

on dérive :

$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{O}_0 O}{dt} + x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt} + \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

\vec{V}_e \vec{V}_r

$$\vec{\gamma}_M = \frac{d^2}{dt^2} \vec{O}_0 O + x \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2} + \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k} + 2 \left(\frac{dx}{dt} \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d\vec{k}}{dt} \right)$$

$$\vec{\gamma}_r = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k}$$

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2}{dt^2} \vec{O}_0 O + x \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2}$$

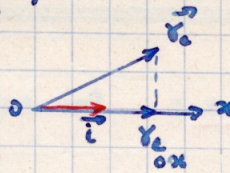
x, y, z fixes.

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_c$$

complémentaire.

$$\vec{\gamma}_c = \Omega \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dj}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dk}{dt} \right)$$

projetons $\vec{\gamma}_c$ sur les axes mobiles:



$$\vec{i} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{j} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} = 0$$

$$(\vec{i} \cdot \vec{j}) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{i} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j} &= 0 \\ -\vec{j} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} + \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{k} &= 0 \\ \vec{k} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{i} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\vec{\gamma}_c \begin{cases} \gamma_{c_{ox}} = (\vec{i} \cdot \vec{\gamma}_c) = \Omega \left(q \frac{dz}{dt} - r \frac{dy}{dt} \right) \\ \gamma_{c_{oy}} = (\vec{j} \cdot \vec{\gamma}_c) = \Omega \left(r \frac{dx}{dt} - p \frac{dz}{dt} \right) \\ \gamma_{c_{oz}} = (\vec{k} \cdot \vec{\gamma}_c) = \Omega \left(p \frac{dy}{dt} - q \frac{dx}{dt} \right) \end{cases}$$

$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \rightarrow$ vit. rel. \vec{v}_r

$p, q, r \rightarrow$ composantes de la rotation $\vec{\Omega}_e$ de S m^t entraînement de (S/S_0)

$$\vec{\gamma}_c = \Omega (\vec{\Omega}_e \wedge \vec{v}_r)$$

Remarque: $\vec{\gamma}_c$ est nul dans les cas suivants.

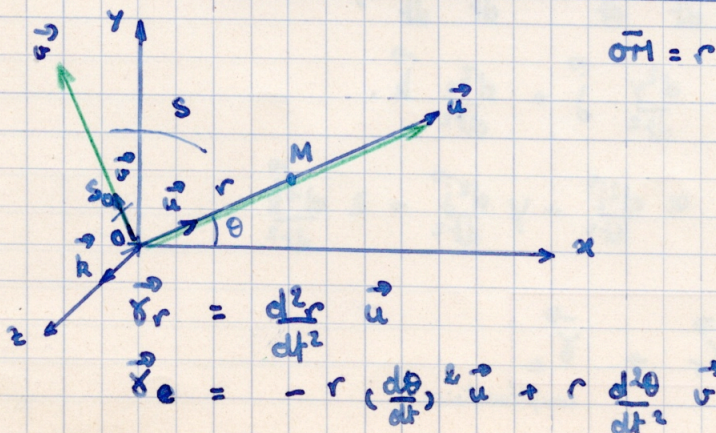
1°/ $\vec{\Omega}_e = 0$: mouvement de (S) est une translation.

2°/ $\vec{v}_r = 0$: M en équilibre relatif (S) .

3°/ $\vec{\Omega}_e$ et \vec{v}_r colinéaires

Applications

1°/ composantes de l'accélération en coordonnées polaires.



$$\vec{M} \left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}_c = \omega \vec{e}_2 \\ \vec{\omega}_c = \omega \vec{e}_2 \\ \vec{\omega}_c = \omega \vec{e}_2 \end{array} \right. = \begin{array}{l} - \frac{3}{2} \vec{e}_2 \\ - \frac{3}{2} \vec{e}_2 \\ - \frac{3}{2} \vec{e}_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{O}_0 \vec{M} \\ \vec{O}_0 \vec{M} \\ \vec{O}_0 \vec{M} \end{array}$$

- (1)
(2)
(3).

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}_c = \frac{\omega \vec{k}}{2} \\ \vec{V}_r = \frac{\omega}{2} \vec{k} \wedge \vec{OM} \end{array} \right.$$

$$\vec{\omega}_c = \frac{\omega \vec{k}}{2}$$

$$\vec{V}_r = \frac{\omega \vec{k}}{2} \wedge \vec{OM}$$

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{OM}) = \vec{OM} \times \vec{k} = - \vec{OM}$$

$$(1) + (2) + (3) \rightarrow \vec{\gamma} = - \frac{\omega^2}{4} (\vec{O}_0 \vec{M} + 3 \vec{OM})$$

centre des acc. $\rightarrow \vec{O}_0 \vec{M} + 3 \vec{OM} = 0.$

$$\vec{O}_0 \vec{M} + 3 \vec{OM} = 4 \vec{JM}.$$

$$\boxed{\vec{\gamma} = - \omega^2 \cdot \vec{JM}}$$

COMPOSITION des MOUVEMENTS

ELEMENTAIRES d'un CORPS SOLIDE.

Problème : on connaît le mt^t élémentaire (dist. vit. à t donné). (S₁/S₁)
 et le mt^t (S₁/S₀)
 Trouver (S/S₀) .

(S/S₁) : mt^t hélicoïdal. (ou transl., ou rotation en part.) (1)

(S₁/S₀) : mt^t hélicoïdal (ou tr. ou rot.). (2)

(S/S₀) : mt^t hélicoïdal. (ou tr. ou rot.).

Problème I : Composition des translations

$$S/S_1 \rightarrow \vec{T}_1$$

$$S_1/S_0 \rightarrow \vec{T}_2$$

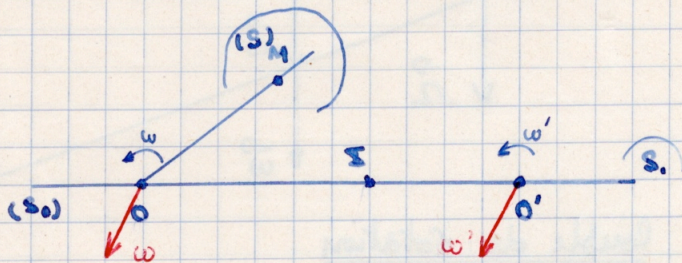
$$S/S_0 \rightarrow \vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$$

$$\vec{V}_M = \vec{V}_r + \vec{V}_e = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{T}$$

Plus généralement, le produit d'un nb quel de transl. est une transl.

Problème II : Composition des rotations

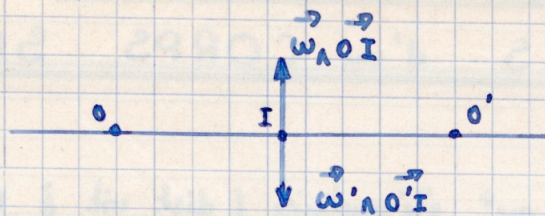
1. 2 rotations parallèles



$$\left\{ \begin{array}{l} (S/S_0) \quad m^t \text{ rot. } \vec{\omega} (O) \\ (S_1/S_0) \quad m^t \text{ rot. } \vec{\omega}' (O') \end{array} \right.$$

$$\vec{V}_M = \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{OM}}_{\vec{V}_r} + \underbrace{\vec{\omega}' \wedge \vec{O'M}}_{\vec{V}_e}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_M &= \vec{\omega} \wedge (\vec{OO'} + \vec{O'M}) + \vec{\omega}' \wedge (\vec{OO''} + \vec{O''M}) \\ &= (\vec{\omega} + \vec{\omega}') \wedge \vec{O'M} + (\vec{\omega} \wedge \vec{OO'} + \vec{\omega}' \wedge \vec{OO''}) \end{aligned}$$



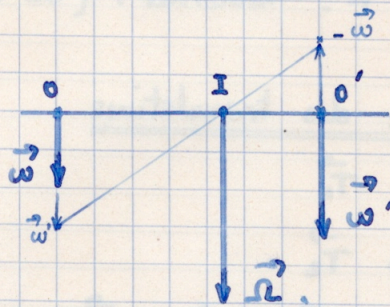
$$\omega \overline{OI} + \omega' \overline{O'I} = 0.$$

Σ barycentre O, O'
(ω), (ω').

$$\vec{V}_M = \vec{\Omega} \wedge \vec{IM}$$

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} + \vec{\omega}'$$

2 rot. // se composent comme 2 vecteurs //.

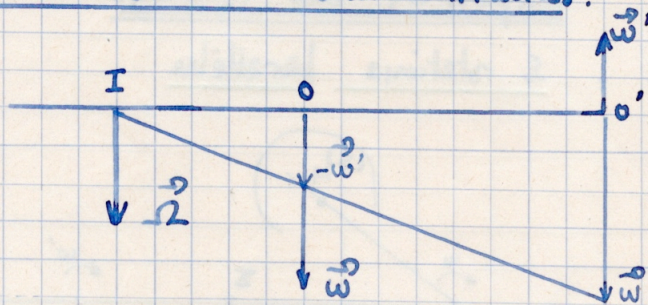


a/ ω et ω' sont de même sens

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} + \vec{\omega}' \quad \text{de même sens.}$$

$$\omega \overline{OI} + \omega' \overline{O'I} = 0$$

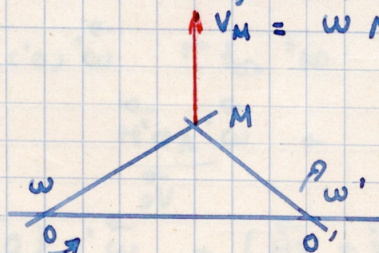
b/ ω et ω' sont de sens contraires.



c/ Couple de rotation

$$\vec{\omega}' = -\vec{\omega}$$

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \wedge \vec{OO'}$$



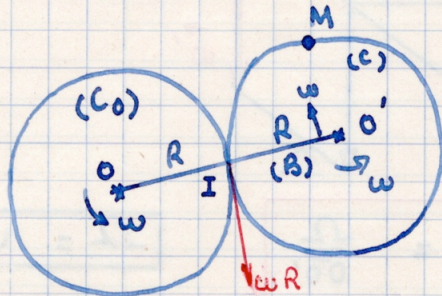
$$V_M = \vec{\omega} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega}' \wedge \vec{O'M}$$

$$V_M = \vec{\omega} \wedge \vec{OM} - \vec{\omega} \wedge \vec{O'M}$$

$$= \vec{\omega} \wedge (\vec{OM} - \vec{O'M}) = \vec{\omega} \wedge \vec{OO'}$$

Un couple de rotation équivaut à une translation $\vec{T} = \vec{\omega} \wedge \vec{OO'}$.

Exemple : manivelle.



$$(C/B) = (C/O) (B/O)$$

$$\vec{\omega}(O') = \vec{\omega}(O)$$

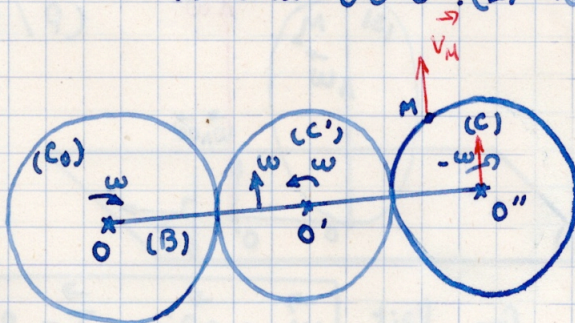
$$(C/O) = \vec{\Omega} = \vec{\omega} + \vec{\omega} = 2\vec{\omega}$$

Vérification : $V_{O'} = 2R\omega = \vec{\Omega} R$

$$\vec{\Omega} = 2\vec{\omega}$$

2^e Exemple :

Le bras $OO'O''$ (B) tourne à la vitesse ω .

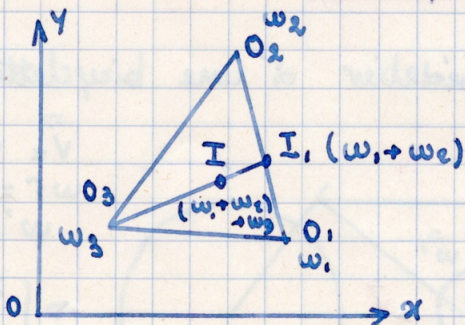


$$(C/B) = -\vec{\omega}(O'')$$

$$(B/O) = \vec{\omega}(O) \left. \vphantom{(B/O)} \right\} \vec{T} = \vec{\omega} \wedge \vec{OO''}$$

Le mouvement de (C) est une translation circulaire

Composition d'un nombre quel que de mouvements



On a autour de I une rotation

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$$

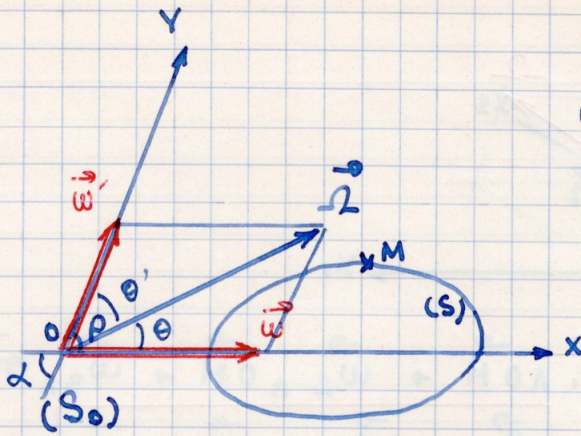
I est le barycentre du système

$O_1(\omega_1)$, $O_2(\omega_2)$, $O_3(\omega_3)$.

$$X = \frac{x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2 + x_3 \omega_3}{\omega}$$

$$Y = \frac{y_1 \omega_1 + y_2 \omega_2 + y_3 \omega_3}{\omega}$$

Composition de 2 rotations concurrentes.



(S/P) : rotation $\vec{\omega}$ (Ox)

(P/So) : rot. $\vec{\omega}'$ (Oy)

$$(S/So) \rightarrow \vec{v}_M = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

$$= \vec{\omega} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega}' \wedge \vec{OM} = (\vec{\omega} + \vec{\omega}') \wedge \vec{OM}$$

$$\vec{\omega} + \vec{\omega}' = \vec{\Omega}$$

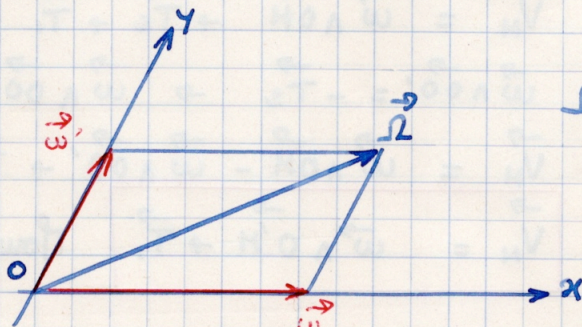
$$\vec{v}_M = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$$

Le mouvement de M est une rotation $\vec{\Omega}$

$$\Omega^2 = \omega^2 + \omega'^2 + 2\omega\omega' \cos \alpha$$

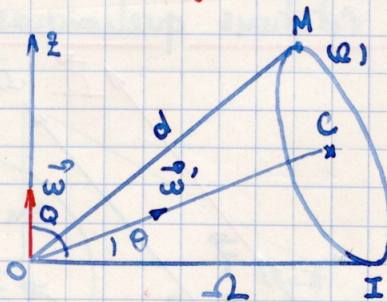
$$\frac{\omega}{\sin \theta'} = \frac{\omega'}{\sin \theta} = \frac{\Omega}{\sin \alpha}$$

Problème inverse : décomposer $\vec{\Omega}$ en 2 rot. concurrentes.



$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} + \vec{\omega}'$$

Exemple :

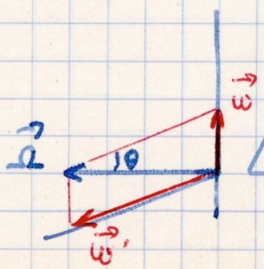


$$(C/P) = (Q/P) \cdot (C/Q)$$

$$\vec{\Omega}_{(Oz)} = \vec{\omega}_{(Oz)} + \vec{\omega}'_{(Oc)}$$

$$v_M = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$$

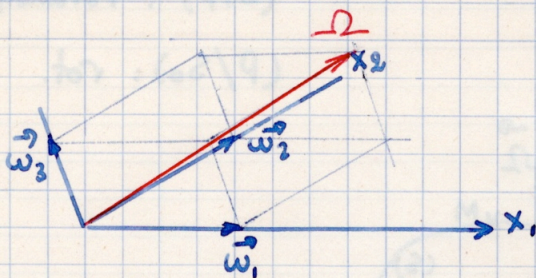
$$= \Omega d \sin 2\theta$$



$$\omega = \frac{\Omega}{\sin 2\theta} \sin \theta$$

$$\omega' = \frac{\Omega}{\sin 2\theta} \cos \theta$$

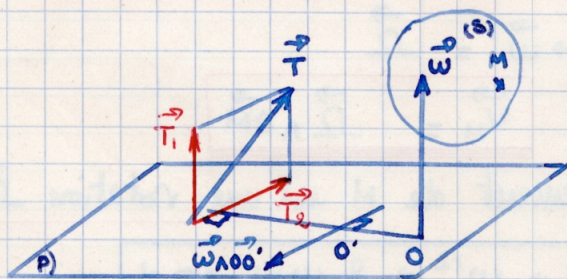
Composition d'un nombre quelconque de rotations concourantes.



$$\vec{V}_M = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{OM} + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{OM} + \vec{\omega}_3 \wedge \vec{OM} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$$

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$$

Composition d'une rotation et d'une translation obliques.



(S/P) → $\vec{\omega}$

(P/S0) → translation $\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$
 $\parallel \vec{\omega} \perp \vec{\omega}$

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \wedge \vec{OM} + \vec{T}_2 + \vec{T}_1$$

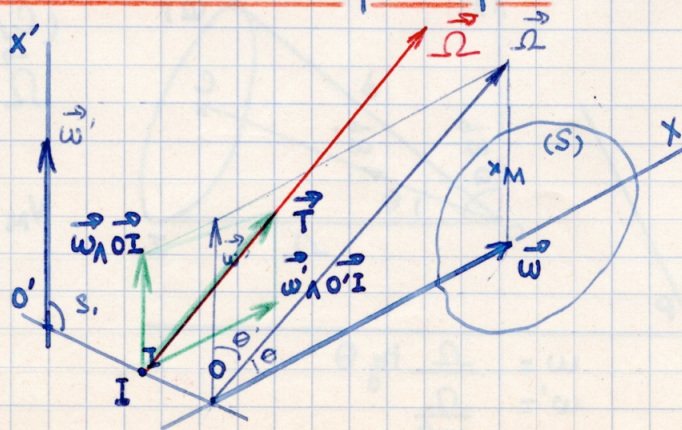
$$\vec{\omega} \wedge \vec{OO}' = -\vec{T}_2 \rightarrow \vec{\omega} \wedge \vec{OO}' + \vec{T}_2 = 0$$

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \wedge \vec{OM} - \vec{\omega} \wedge \vec{OO}' + \vec{T}_1$$

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \wedge \vec{O'M} + \vec{T}_1$$

Mouvement hélicoïdal d'axe Δ.

Composition de 2 rotations quelconques.



x, x' axes de rotation.

OO' commune à x et x' .

$$\begin{aligned} (S/S_1) &\rightarrow \vec{\omega} (x) \\ (S_1/S_0) &\rightarrow \vec{\omega}' (x') \end{aligned}$$

$$\vec{V}_M = \underbrace{(\vec{\omega} \wedge \vec{OM})}_{V_r} + \underbrace{(\vec{\omega}' \wedge \vec{O'M})}_{V_e}$$

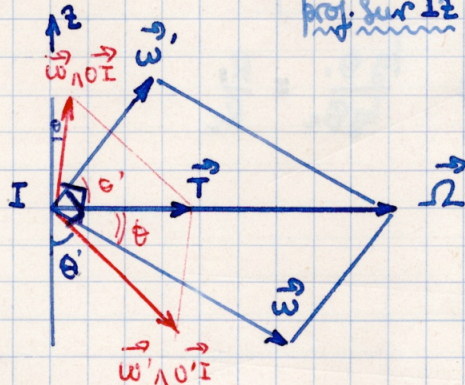
On choisit arbitrairement I sur OO' .

$$\begin{aligned} \vec{V}_M &= [\vec{\omega} \wedge (\vec{OI} + \vec{IM})] + [\vec{\omega}' \wedge (\vec{OI} + \vec{IM})] \\ &= (\vec{\omega} + \vec{\omega}') \wedge \vec{IM} + \underbrace{(\vec{\omega} \wedge \vec{OI}) + (\vec{\omega}' \wedge \vec{OI})}_{\vec{T}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{V}_M = \vec{\Omega} \wedge \vec{IM} + \vec{T}}$$

On a un mouvement hélicoïdal. On peut choisir I sur OO' tel que \vec{T} ait la même direction que $\vec{\Omega}$.

Remarque : $\vec{T} = \vec{V}_I$



proj. sur Ix : $\omega OI \cos \theta = \omega' O'I \cos \theta'$

$$\frac{OI}{O'I} = \frac{\omega'}{\omega} \frac{\cos \theta'}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta'} \frac{\cos \theta'}{\cos \theta}$$

$$\boxed{\frac{OI}{O'I} = \frac{\tan \theta}{\tan \theta'}}$$

$$\alpha = \theta + \theta'$$

$$\frac{\omega'}{\sin \theta} = \frac{\omega}{\sin \theta'} = \frac{\Omega}{\sin \alpha}$$

proj sur $\vec{\Omega}$: $T = \omega OI \sin \theta + \omega' O'I \sin \theta'$

$d = OO'$

$$T = \omega \sin \theta \cdot d$$

$$\boxed{T = \frac{\Omega d \sin \theta \cdot \sin \theta'}{\sin \alpha}}$$

Construction géométrique de l'axe hélicoïdal.

CINEMATIQUE APPLIQUEE

GENERALITES

On appelle mécanisme un ensemble de corps solides ou déformables assujettis à des liaisons.

Ex : bielle. manivelle

transmet puissance P_1 et fournit P_2 .

rendement $r = \frac{P_2}{P_1}$

On peut classer les mécanismes par les mouvements transformés.

- rectiligne. (continu ou alternatif).
 - circulaire. (continu révolutif ou alternatif).
 - quelconque. (" " " ")
- } classification de Monge.

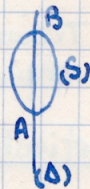
On peut aussi classer par classification organique : couples de contact.

deux corps S_1 et $S_2 \rightarrow$ couple de contact.

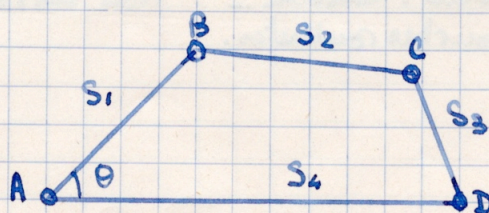
$S_2/S_1 \rightarrow$ dépend de 6 paramètres ds l'espace.
" " " " ds le plan.

Sphère assujettie à rouler sur un plan : 5 paramètres car on n'impose qu'une condition ($c = R$)

Couple rotatoire :



1 paramètre (vis.écrou par ex.).



quadrilatère articulé.

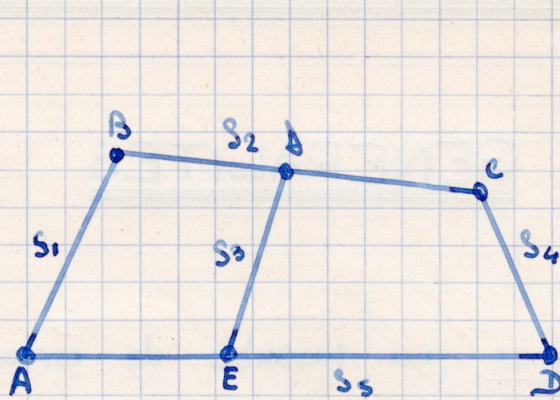
θ détermine la position
1 degré de liberté.

n corps \rightarrow $(n-1) \cdot 3$
 k conditions

paramètres indépendants.

$\rightarrow [(n-1) \cdot 3 - k]$ degrés de liberté.

Syst. indéformable : degré liberté = 0.



articulation
 $k = 2 \times 6$
5 barres.
 $\rightarrow 4 \times 3$ paramètres.
 $\rightarrow 4 \times 3 - 2 \times 6 = 0$
indéformable.

Si on ajoute une autre barre : deg. lib. $< 0 \rightarrow$ hyperstatique.

Plan de la cinématique appliquée

10. Engrenages

a / engrenages à axes //.

- engrenages droits (dents : surfaces cylindriques)
- engrenages hélicoïdaux (surfaces hélicoïdales) ou spiraux.

b / engrenages à axes concourants

- engrenages droits.
- engrenages hélicoïdaux ou spiraux.

c / engrenages à axes quelconques.

engrenages gauches, hélicoïdaux ou spiraux.

20 / Application des engrenages

Trains d'engrenages.
Trains épicycloïdaux.

30 / Système articulé.

bielle . manivelle . . . trois barres . . . Cames et excentriques.
courbes roullantes.

ENGRENAGES

Problème général :

Un corps A a par rp à un bâti B un mouvement de loi géométrique donnée. $(R, T$ ou $MH)$.

(A'/B) défini géométriquement $(R, T$ ou $MH)$.

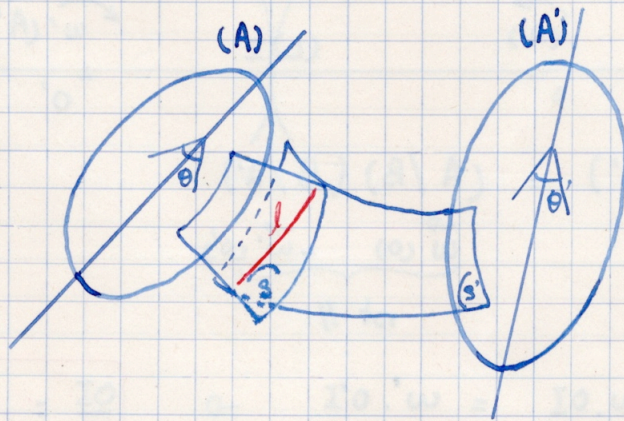
Si une surface (S) liée à A reste en contact avec (S') liée à A' à une loi de tps $\Theta = F(t)$ ds le $m^t (A/B)$, correspondra une loi de tps $\Theta' = F_1(t)$ ds les $M^t (A'/B)$

Le Pb général est de déterminer les surfaces S et S' connaissant les lois de tps $\Theta = F(t)$ et $\Theta' = F_1(t)$ ou $\Theta' = F(\Theta)$.

Si L est cette relation, (S) et (S') seront dites conjugués relativement à (L) .

Le plus souvent $\Theta' = \lambda \Theta$

Solution générale du Pb :



$$(L) \rightarrow \Theta' = F(\Theta)$$

$$(A/A') = \underbrace{(A/B)}_{\text{donnée}} \underbrace{(B/A')}_{\text{donnée}}$$

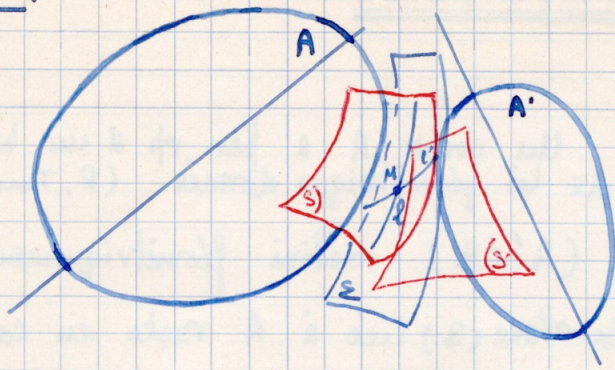
$\Theta = \Theta_1$

ds (A/A') S est une enveloppe S' .

(S) et (S') sont conjugués et ttes le long d'une ligne ℓ .

Contact linéaire.

2^e solution



$S \text{ et } \varepsilon \rightarrow L.$

$S' \text{ et } \varepsilon \rightarrow L'.$

$S \text{ et } S' \rightarrow \text{pt } M.$

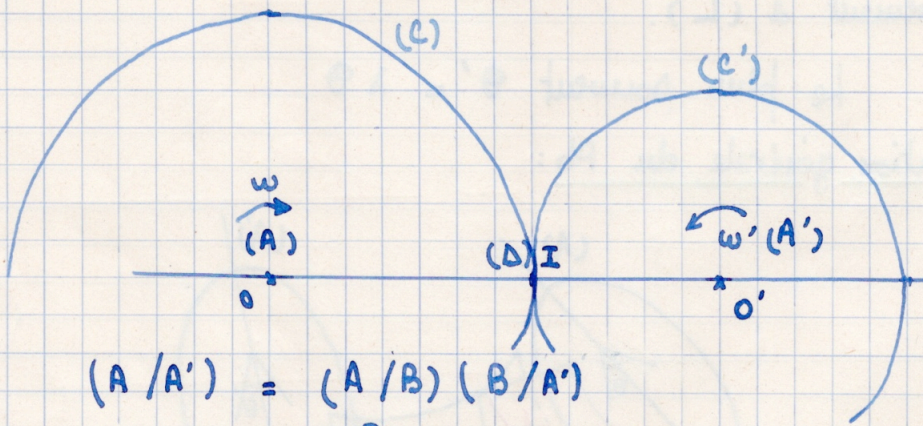
engrenage à contact ponctuel.

Engrenages à axes parallèles ou cylindriques droits.

Cylindres primitifs.

Rotations autour de 2 axes parallèles.

10/ rotations de sens contraires.



$$(A/A') = (A/B) (B/A')$$

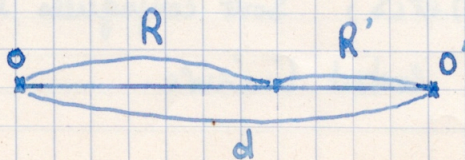
$$\underbrace{\vec{\omega}(O) \quad - \vec{\omega}'(O')}_{\text{rot } \parallel}$$

$$\omega \cdot OI = \omega' \cdot O'I \rightarrow \boxed{\frac{OI}{O'I} = \frac{\omega'}{\omega}}$$

Surfaces primitives: Lieu de (D) ds (A/B) et ds (B).

Surfaces axiales dans le M⁺ (A/A')

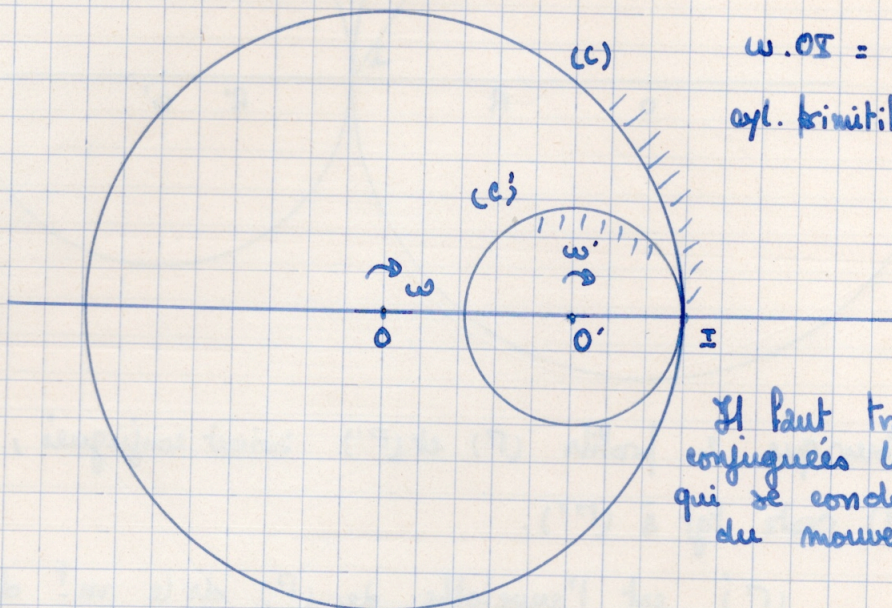
(c) } cylindres de révolution. Lieux de (D).
(c')



$$d = R + R'$$

$$\frac{D}{D'} = \frac{R}{R'} = \frac{\omega}{\omega'} = \frac{N}{N'}$$

20/ Rotations de même sens.



$$\omega \cdot OI = \omega' \cdot O'I$$

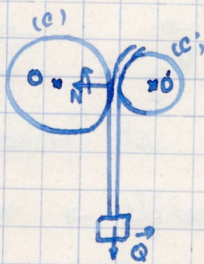
cyl. primitifs $\left(\begin{matrix} (O, OI) \\ (O', O'I) \end{matrix} \right)$

Il faut trouver les surfaces conjuguées liées à (c) et (c') qui se conduisent au cours du mouvement.

Cylindres de friction

Les cylindres primitifs : 2 surfaces conjuguées \rightarrow cylindres de friction

Ex: monte-charge



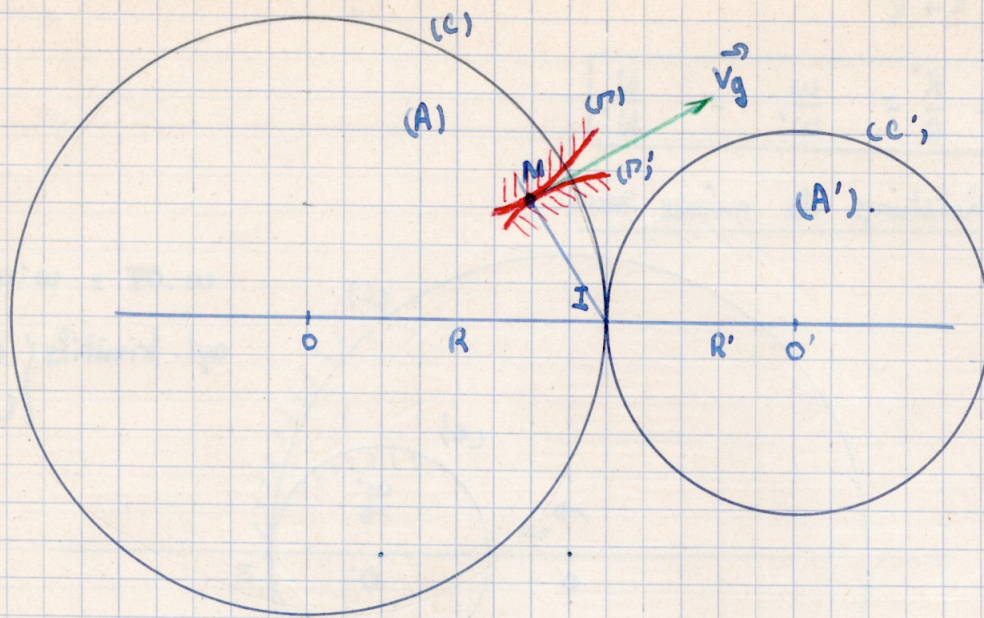
efforts limités par le glissement.

$$F_N > Q$$

Engrenages cylindriques droits.

Les surfaces conjuguées sont cylindriques. Les génératrices sont // aux génératrices du cylindre. Elles sont déterminées par une section \perp aux axes. On appelle circonférence primitive la section droite du cylindre primitif.

Sections des surfaces conjuguées \rightarrow profils conjugués



Pour que 2 profils (P) et (P') soient conjugués, il faut que (P) reste tgt à (P') .

(P') est l'enveloppe de (P) ds le mt de $(A)/(A')$.

Σ est C.I.R. ds (A/A') \rightarrow ΣM normale à (P) et (P') .

Vitesse de glis! $A/A' \rightarrow$ rotation $\vec{\Omega} = \vec{\omega} - \vec{\omega}' / I$

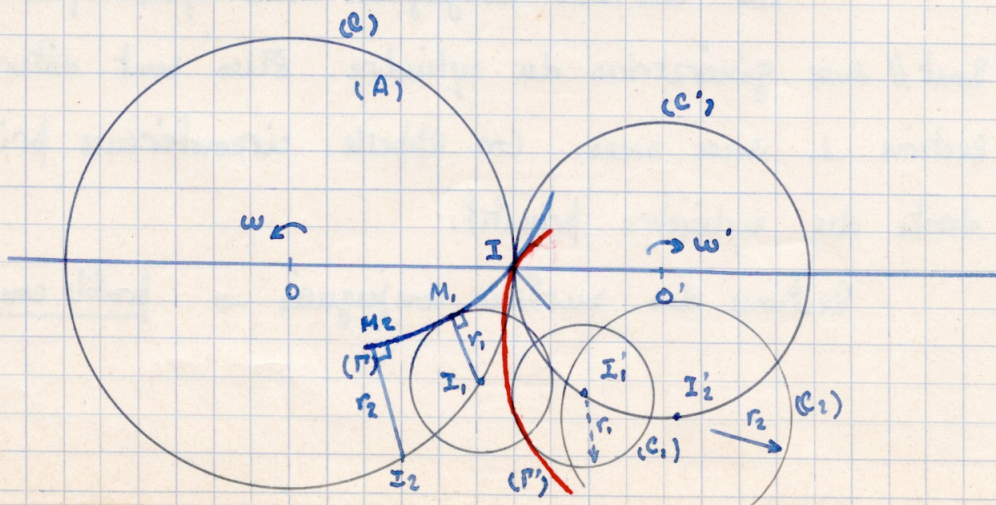
$$|\vec{\Omega}| = \omega + \omega'$$

$$\vec{V}_g = \vec{\Omega} \wedge \vec{IM}$$

\vec{V}_g est proportionnelle à $\Sigma M \rightarrow$ rendre ΣM le plus petit possible \rightarrow multiplier les profils.

Détermination des profils conjugués.

10/ Méthode des enveloppes ou de Poncelet.



On se donne arbitrairement (P) lié à (A) ou à la circonférence (C) .

On fait rouler (C) sur (C') . On cherche l'enveloppe de (P) .

(P') passe par I .

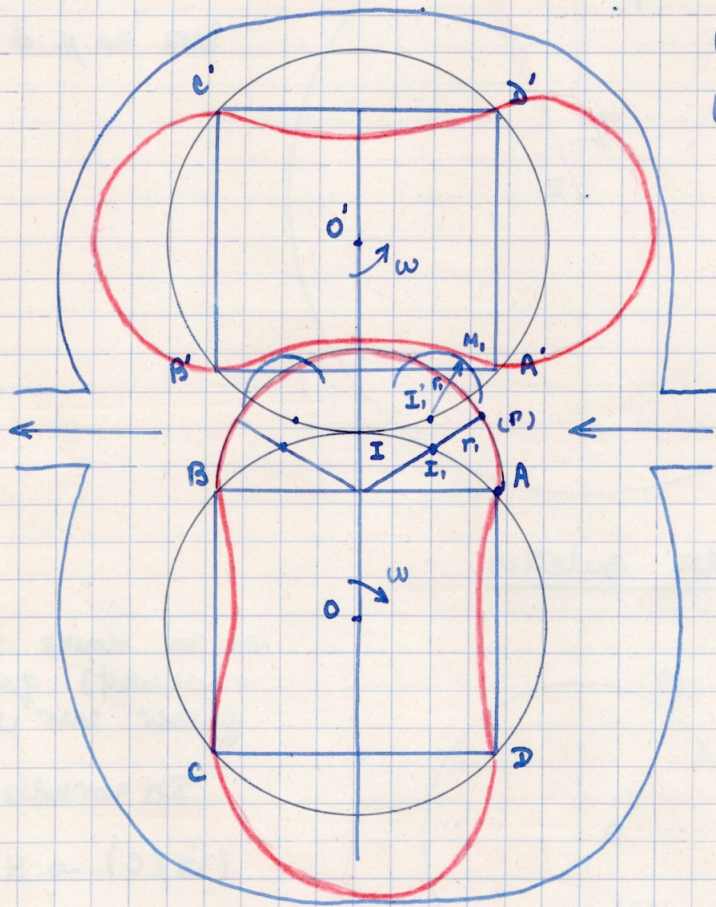
A l'instant t_1 , (P) et (P') sont en M_1 et au cercle (I_1, r_1)

(P') est à (C_1) .

(P') est à (C_2)

} On définit l'enveloppe de la famille de cercle.
→ (P') .

Application aux pompes rotatives.



On se donne comme profil (P)

le $\frac{1}{2}$ cercle de $\varnothing AB$

de I_1 → \perp à (P) .

puis cercle $(I_1, \frac{I_1 M_1}{r_1})$,

et cercle symétrique → profil conjugué.

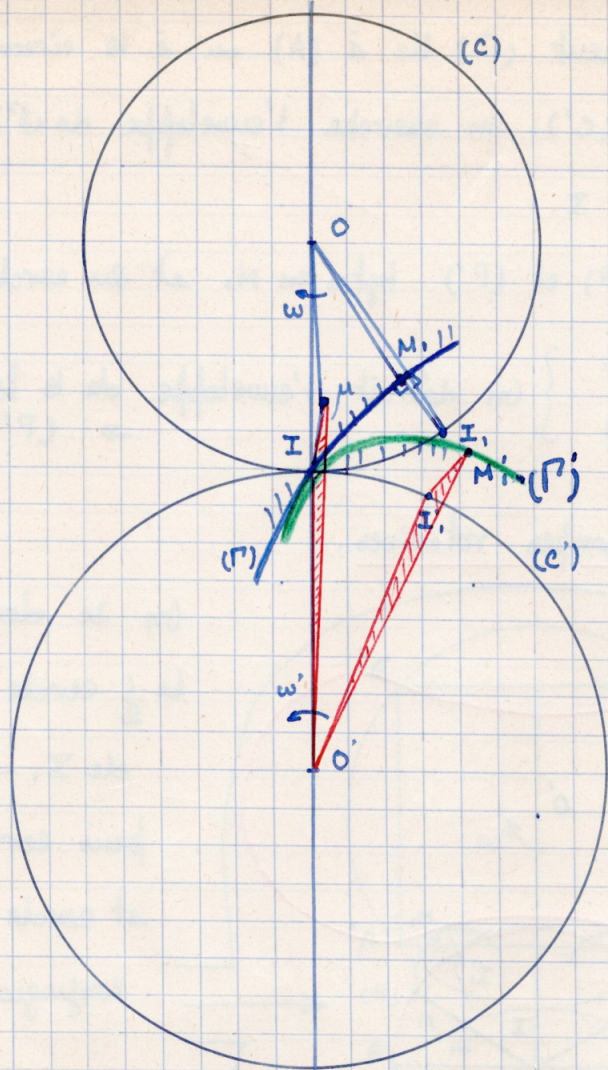
2° Méthode de Reuleaux

On se donne (P) .

M_1 pt caractéristique de (P) au tps t_0 .

M_1 sera en μ à l'instant t_1 .

On construit le triangle $O I \mu =$ triangle $O I, M_1$.

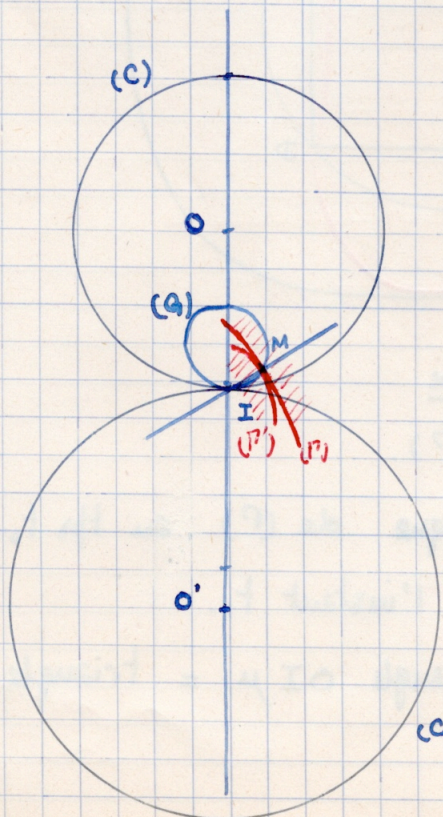


Lieu de μ par rp au bâti
= ligne d'engrènement.

Les 2 profils sont liés en Σ
On construit sur $O'S'$ le triangle
 $O'S'M'$.

M' est le pt de (P') qui
sera en μ à l'instant t .

3°/ Méthode des roulettes.



On se donne G (un cercle le
→ souvent) qui roule sans
glisser sur (c) et (c') .

ΣM normale à (P') .

$(G/c) \rightarrow M \rightarrow (P')$.

(P) et (P') conjugués.

G/c' , la trajectoire de M est (P')
 (P') roulette de $M \rightarrow$ épicycloïde.

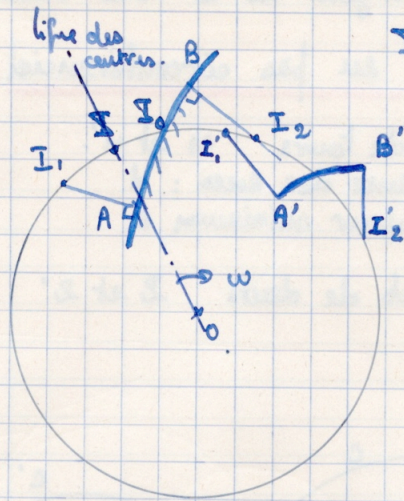
G/c , la roulette est (P)
 $(P) \rightarrow$ hypocycloïde.

(P) et (P') ont une normale

c' commune $\Sigma M \rightarrow$ profils conjugués.

Continuité de Fonctionnement.

Un profil donné (Γ) n'est utilisé que sur une portion limitée AB.
 Si on mène les normales en A et B au profil

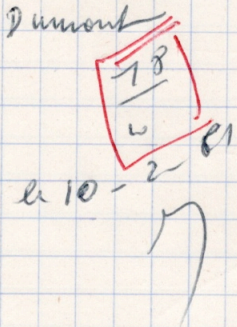


I décrit $\widehat{I_1 I_2}$

$\widehat{I_1 I_2}$ = arc de conduite.

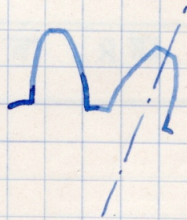
$\widehat{I_1 I_0}$ = arc de retraite.

$\widehat{I_0 I_2}$ = arc d'approche.

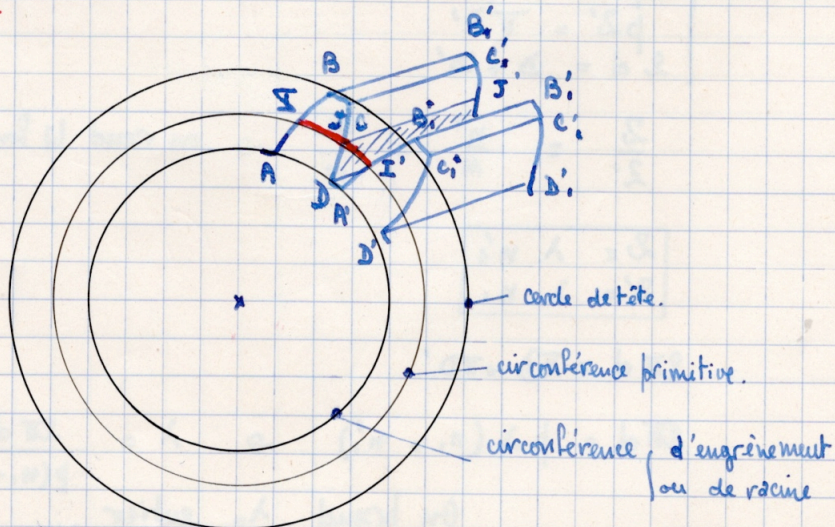


Continuité de conduite.

Il faut toujours un profil en prise. Pour un fonctionnement dans les 2 sens, il faut que les profils soient symétriques.



Définitions



Pas circonférenciel : $\widehat{II'} = p$.

\widehat{II} : épaisseur e
 $\widehat{II'}$: creux c } $p = e + c$.

Plan : $JJ'DD'$
 JJ' : ligne de Plan.

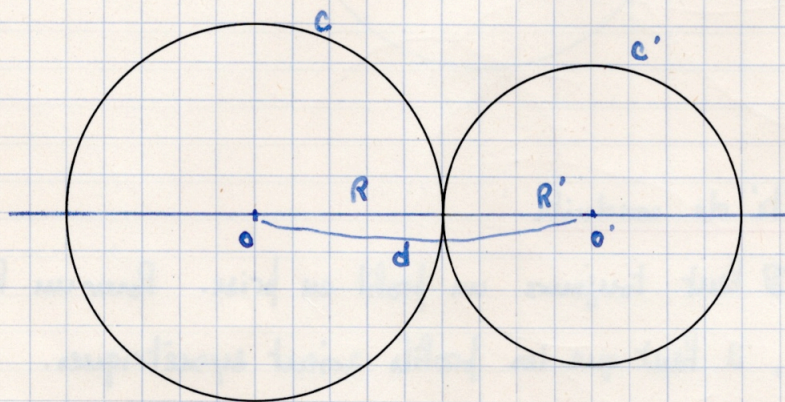
Face : partie extérieure du Cp. ($JJ'C'C'$).

$BB' = AA' = JJ' =$ largeur de la roue dentée : l .

Calcul d'un engrenage au pas circonférenciel. (p)

Données : nb de tours n et n'
distance des axes : d
épaisseur minimum e

Inconnues : nb de dents Z et Z'



Gn 1: $pZ = 2\pi R = \pi D.$

Gn 2: $Rn = R'n'.$

$$\begin{cases} pZ = \pi D \\ pZ' = \pi D' \\ 2d = D + D' \end{cases}$$

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{n'}{n} = \frac{n'}{n} \rightarrow \text{on rend la fonction irréductible.}$$

$$\begin{cases} Z = \lambda n' \\ Z' = \lambda n \end{cases}$$

$$2\pi d = \pi D + \pi D'$$

$$2\pi d = p\lambda(n + n') \rightarrow \lambda = \frac{2\pi d}{p(n + n')}$$

On prend λ_0 entier.

Exemple numérique :

$$\begin{aligned}m &= 150 \text{ t/mm} \\ m' &= 120 \text{ t/mm} \\ p &= 12 \text{ mm} \\ d &= 250 \text{ mm}.\end{aligned}$$

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{m'}{m} = \frac{120}{150} = \frac{4}{5}.$$

$$\begin{cases} Z = 4\lambda \\ Z' = 5\lambda \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{500\pi}{12 \times 9} \approx 14$$

$Z = 56 \text{ dents}$
$Z' = 70 \text{ dents}$

$$\text{pas exact} = \frac{50\pi}{9 \times 14} = 12,4 \text{ mm}.$$

On en déduit D et D' .

$$\begin{aligned}D &= \frac{pZ}{\pi} \\ D' &= \frac{pZ'}{\pi}\end{aligned}$$

Le calcul au pas donne des nombres compliqués (décimales).

Module.

On considère de ϕ primitif D .

par définition :

$M = \frac{Dp}{Z}$

$p = \pi M$

modules usuels : 1 ; 1,25 ; 1,50 ; 2 etc...

Calcul d'un engrenage au module.

Données : m et m' en t/mm.
 d : distance des axes.
 e : épaisseur. $\rightarrow p \rightarrow \underline{M}$

Formules :

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{m'}{m} = \frac{m_1}{m_2}$$
$$\begin{cases} Z = \lambda n_1 \\ Z' = \lambda n_2 \end{cases}$$

$$2d = D + D' = M(Z + Z') \rightarrow$$

$\lambda = \frac{2d}{M(n_1 + n_2)}$

$\lambda \rightarrow \lambda_0$ entier. On peut donc écrire: $D = M Z$
 $D' = M Z'$

$$2d = D + D' \rightarrow d \text{ modifié.}$$

Résumé :

- calcul de λ .
- calcul de Z et Z' .
- calcul de D et D' .
- calcul de d .

Exemple numérique :

$$\left\{ \begin{array}{l} e > 6 \text{ mm.} \\ m = 150 \text{ t/mm.} \\ n' = 120 \text{ t/mm.} \\ d_{\text{app.}} = 240 \text{ mm.} \end{array} \right.$$

$$p = 12 \text{ mm.}$$

$$M = \frac{P}{\pi} > \frac{12}{\pi} \approx 3,7 \rightarrow M = 4 \text{ mm.} \quad \text{On prend } M \text{ par excès.}$$

$$\lambda = \frac{2d}{M(n'+n)} = \frac{480}{4 \times 9} \approx 13 \quad \begin{array}{l} \text{par défaut} \\ \text{par excès.} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = 52 \text{ dents.} \\ Z' = 65 \text{ dents.} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} D = 208 \text{ mm} \\ D = 260 \text{ mm} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} 2d = 468 \text{ mm.} \\ d = 234 \text{ mm.} \end{array}$$

$$\text{Plancs} : P = \frac{7}{8} M.$$

$$\text{Faces} : F = M$$

Pas diamétral Anglais ou diamétral pitch.

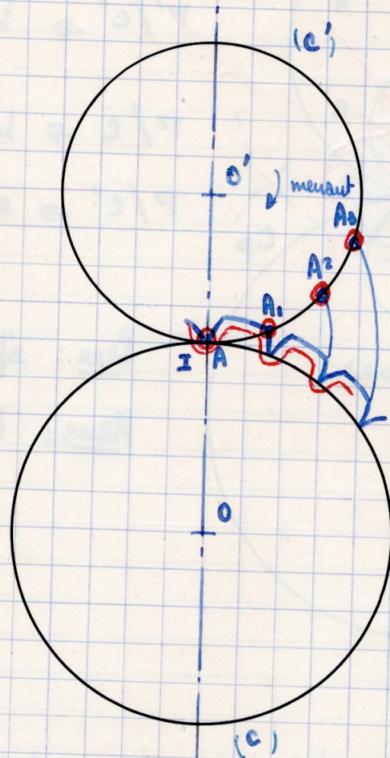
$$\omega = \frac{Z}{D \text{ (en pouce)}}$$

$$M \omega = 25,4$$

ENGRENAGES CYLINDRIQUES USUELS. EXTERIEURS

I. Engrenages à lanternes

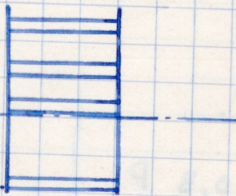
a) profils théoriques.



Les enveloppes sont des épicycloïdes.

b) profils réels

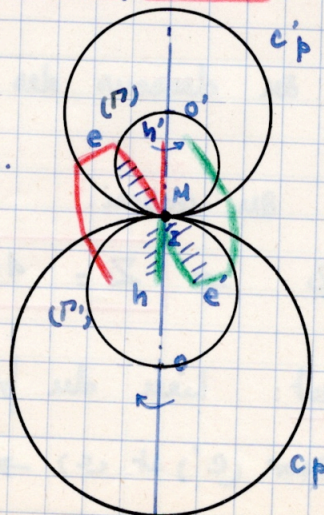
en A_1, A_2 etc., on a des cylindres (lanternes).



II. Engrenages épicycloïdaux.

Pas indépendant des
circonférences primitives.

donc pas de séries.



A. Engrenages à Planes droits.

P et P' de ϕ O Σ et O' Σ .

M $\left\{ \begin{array}{l} P/c \rightarrow \text{épicycloïde : e} \\ P'/c' \rightarrow h' = MO' = \text{hypocycl.} \end{array} \right.$

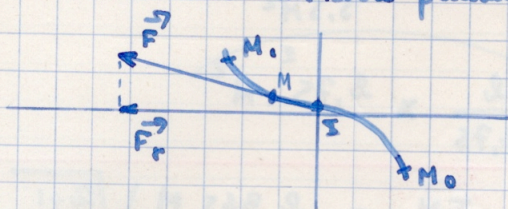
M $\left\{ \begin{array}{l} P'/c \rightarrow h = O\Sigma. \\ P'/c' \rightarrow e'. \end{array} \right.$

engr. épicycloïdal à Planes droits. 1/3

ligne d'engrènement en approche : \widehat{IM}_0

Direction de l'effort

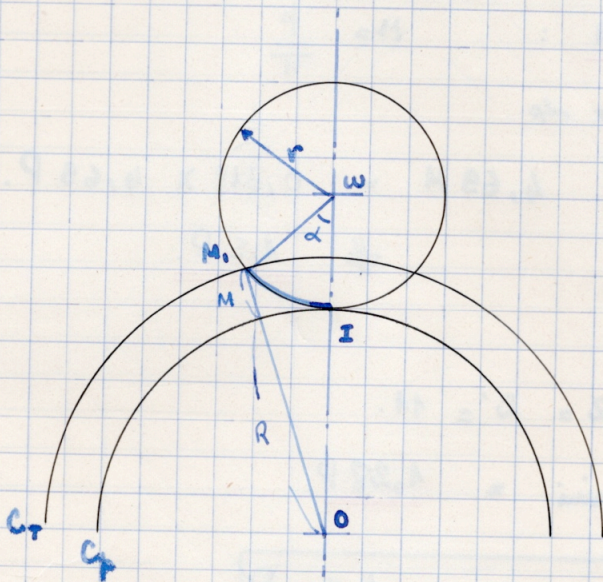
IM est variable pendant la conduite.



F^2 varie pendant la conduite \rightarrow vibrations.

Calcul des arcs de conduite dans les engrènements épicycloïdaux.

Quand M décrit $\widehat{M_0IM}$, I décrit sur C_p un arc égal $\widehat{I_0II}$, car roulement sans glissement.



$$OM_1 = R + M$$

$$O\omega = R + r.$$

$$\overline{OM_1}^2 = \overline{O\omega}^2 + \overline{\omega M_1}^2 - 2\overline{O\omega} \cdot \overline{\omega M_1} \cos \alpha.$$

$$(R + M)^2 = (R + r)^2 + r^2 - 2r(R + r) \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{(R + r)^2 + r^2 - (R + M)^2}{2r(R + r)}$$

$$1 - \cos \alpha = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{2r(R + r) - (R + r)^2 - r^2 + (R + M)^2}{2r(R + r)}$$

$$= \frac{M(2R + M)}{r(2R + 2r)}$$

$$2R = MZ$$

$$2r = 2,5M$$

$$\frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{Z + 1}{2,5(Z + 5)}$$

On suppose α petit $\rightarrow \frac{\alpha}{2} \approx \sin \frac{\alpha}{2}$

$$l \times \frac{l}{4} = \frac{z+1}{2,75(z+5,5)}$$

$$l^2 = \frac{l(z+1)}{2,75(z+5,5)}$$

$$\widehat{I M}_1^2 = \frac{z+1}{z+5,5} \times \frac{l}{2,75} \times \overset{5,5 M^2}{2,75 \cdot M^2}$$

en retraite : $\widehat{I I}_1 = \widehat{I M}_1 = 2,345 M \sqrt{\frac{z+1}{z+5,5}} = a_1$

en approche : $\widehat{I_0 I} = \widehat{I M}_0 = 2,345 M \sqrt{\frac{z'+1}{z'+5,5}} = a_2$

Arc de conduite : $a = a_1 + a_2$

Maximum de a : $M = \frac{P}{\pi}$

$z \rightarrow \infty$

$$a_{\max} = 4,69 M = 0,318 \times \frac{P}{\pi} \times 4,69 P$$

$\neq \underline{\underline{1,5 P}}$

Minimum de a :

$z = z' = 11$

$a_{\min} = \underline{\underline{1,28 P}}$

$$\boxed{1,28 P < a < 1,5 P}$$

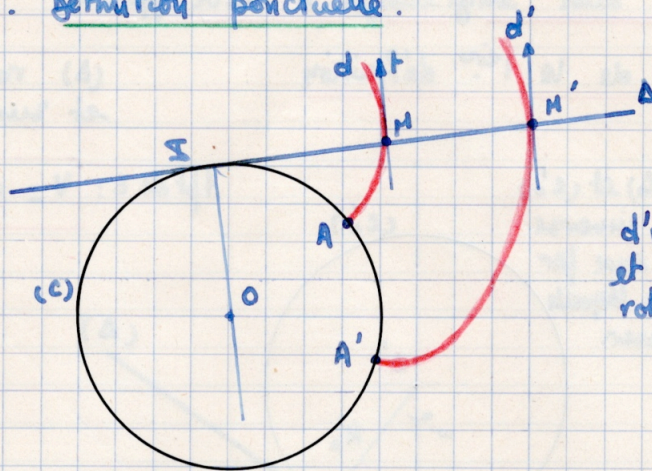
au maximum, 2 couples de dents en prise, même pour des engrenages intérieurs.

ENGRENAGES à DEVELOPPANTES de CERCLE.

Définitions :

Développante de cercle :

A. Définition ponctuelle.



Trajectoire d'un pt M de Δ roulant sans glisser sur un cercle (C).

Toutes les développantes d'un m^e cercle sont égales et se correspondent par une rotation.

SM : normale en M à (d). $SM =$ rayon de courbure en M.

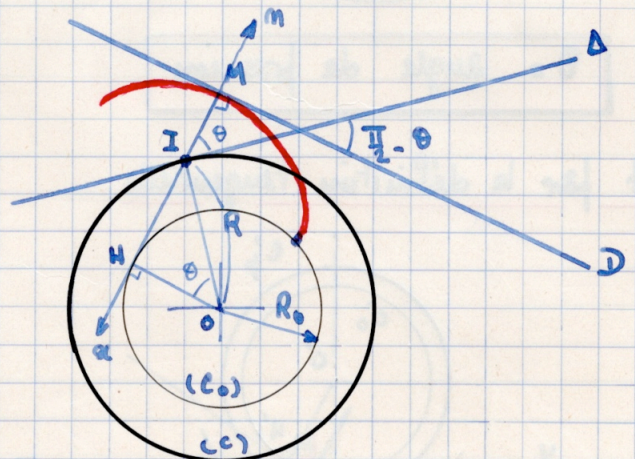
$MT \perp SM$

(C) développée de (d).

rayon de courbure = SM

(C) noyau de la développante ou cercle de base.

B. Définition tangentielle.



(A) roule sans glisser sur (C).

(D) liée à (A).

$$OM = R \cos \theta = R_0.$$

La développée de l'enveloppe de (D) est le cercle (C).

On obtient le pt caractéristique M de l'enveloppe de D en menant $SM \perp D$.

IM reste tpte au cercle (O, OH) . $OM = R \cos \theta$.

(D) enveloppe d'une développante de cercle (C_0) .

définition: L'enveloppe d'une droite D liée à une droite Δ roulant sans glisser sur un cercle (C) est une développante du cercle C_0 .

$$C_0 \mid R_0 = R \cos \theta$$

II Application aux engrenages à développantes

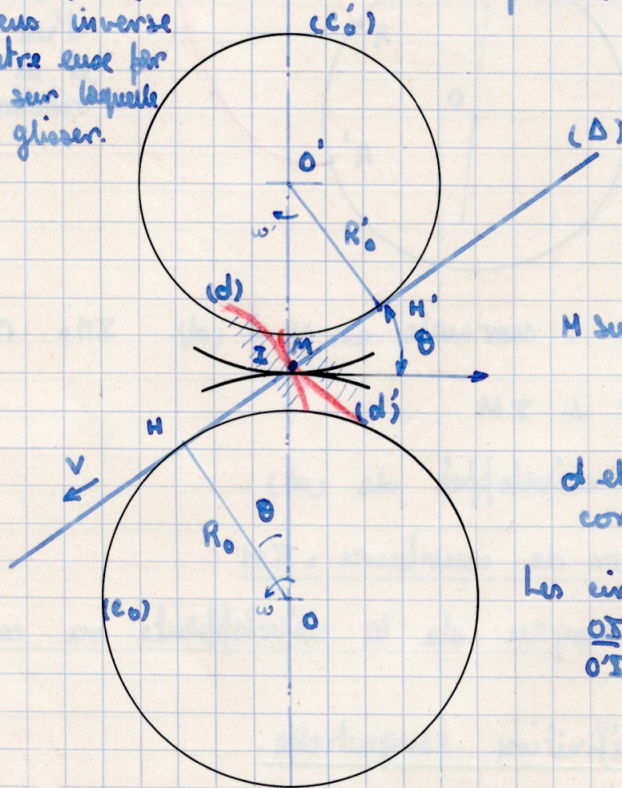
a/ A partir de la 1^{ère} définition

(Δ) roule sans glisser sur (C_0) et sur (C'_0) .

Deux cercles (C) et (C') tournent en sens inverse et sont liés entre eux par une droite Δ sur laquelle ils roulent sans glisser.

1 pt de Δ : $V = \omega R_0 = \omega' R'_0$

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R_0}{R'_0}$$



M sur (Δ) $\left\{ \begin{array}{l} (\Delta/C_0) \rightarrow M \text{ décrit } (d) \\ (\Delta/C'_0) \rightarrow M'' \text{ (d')} \end{array} \right.$

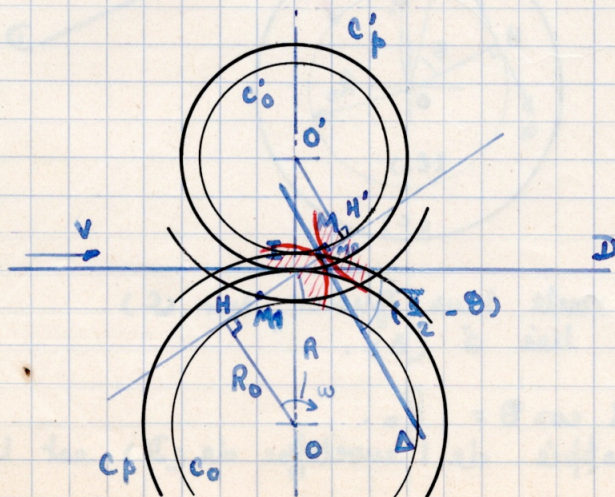
d et d' conjuguées car normale commune HH' tptes en M.

Les circonférences primitives passent par I

$$\frac{OI}{O'I} = \frac{R}{R'} = \frac{R_0}{R'_0}$$

$\theta =$ angle de pression

b/ Complément par la définition tangentielle.



On considère les 2 circonférences primitives (C_p) et (C'_p) ainsi que (D) tangente commune en I.

Prendons (Δ) liée à (D) et cherchons son enveloppe dans le mouvement de D / C_p .

→ c'est une développante de noyau C_0 tangente en H à IM.

Enveloppe de (Δ) dans D / C'_p → développante (d') de noyau (C'_0).

Propriétés des engrenages à développantes

1°/ $\frac{N'}{N} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{R_0}{R'_0} = \frac{R}{R'}$

2°/ la ligne d'engrènement est la droite HH' .

c'est le segment $\overline{M_0 M_1}$ sur HH' (à l'intérieur des circonférences de tête).

θ = angle de pression constant.

3°/ M a une vitesse v constante.

→ \vec{F}^{\Rightarrow} = Cste si la puissance est constante. ($F = Cste$ en intensité et direction)

4°/ roues d'adduction pourvu que les roues aient m_n module et m_n angle de pression.

5°/ (d) et (d') restent conjugués si on modifie la distance des centres. (θ varie).

Calcul de l'arc de conduite.

ligne d'engrènement: HH' .

Arc de conduite maximum: M décrit le segment HH' .

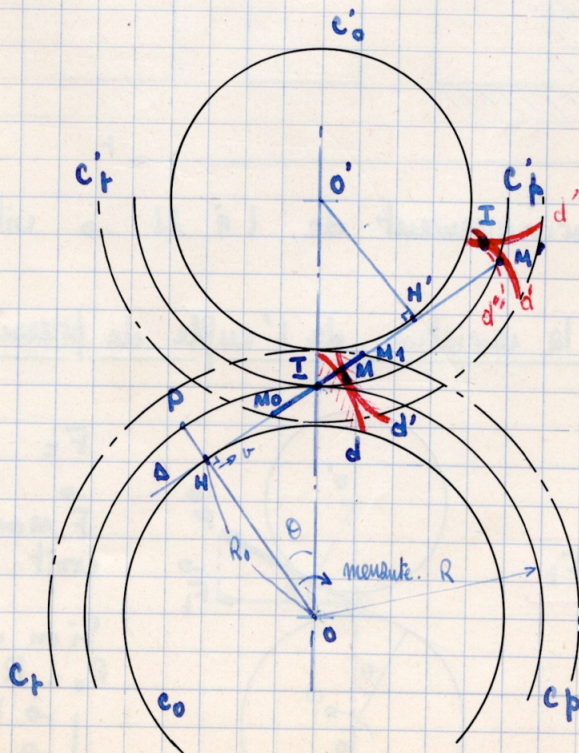
soit v la vitesse de M sur A.

$v = v_H \rightarrow v_P = \frac{v_H}{\cos \theta}$

$R_0 = R \cos \theta$.

θ = angle de pression.

P décrit $\frac{HH'}{\cos \theta}$.



Arc de conduite $d_{max} = \frac{HH'}{\cos\theta} = \frac{d \sin\theta}{\cos\theta} = d \tan\theta$

$d = 00'$

Arc de conduite réel = $\frac{MOM}{\cos\theta}$

en approche : $d_a = \frac{MOI}{\cos\theta}$
 en retraite : $d_r = \frac{IM_1}{\cos\theta}$

Nombre minimum de dents

$(R + R') \tan\theta \geq P = M\pi$

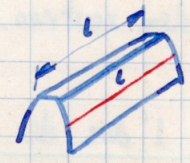
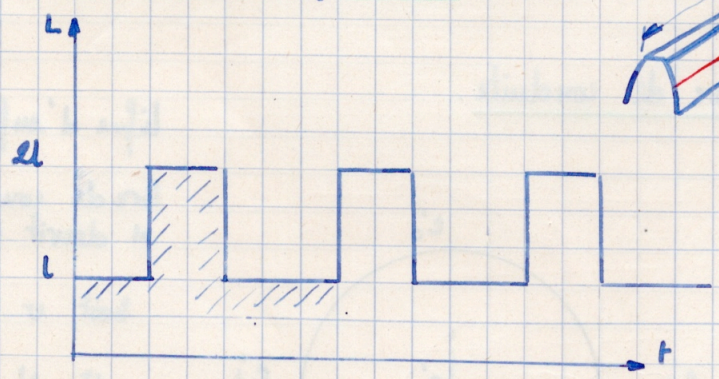
$\left. \begin{matrix} R = R' \\ eR = MZ \end{matrix} \right\} \rightarrow MZ \tan\theta \geq M\pi$

$Z > \pi \cot\theta$

$\theta = 15^\circ \rightarrow Z \geq 12$ dents.

$\theta = 20^\circ \rightarrow Z \geq 9$ dents.

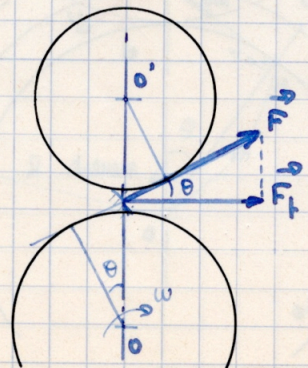
Longueur totale d'engrènement.



passé brusquement de l à $2l \rightarrow$ vibrations.

Influence de la variation de l'angle de pression θ sur les profils.

$W = w.R.F_t$
 puissance.



$F = \frac{F_t}{\cos\theta}$
 F normale à la denture
 croît avec θ .

Si on diminue θ , on augmente
 $R_0 = R \cos\theta$
 \rightarrow hauteur des flancs diminue.
 \rightarrow Arc de conduite diminue.

$$\theta \text{ normalisés} = 15^\circ \quad 17^\circ 30' \quad 20^\circ$$

Profils auxiliaires d'aidement.

nécessaires qd $R - R_0 < F$ (Plane).

$$F = 0,4 P \text{ ou } \frac{7}{6} M.$$

$$R_0 = R \cos \theta.$$

$$R (1 - \cos \theta) < 0,4 P$$

$$\text{ou } R (1 - \cos \theta) < \frac{7}{6} M.$$

$$M Z (1 - \cos \theta) < 0,8 \pi M.$$

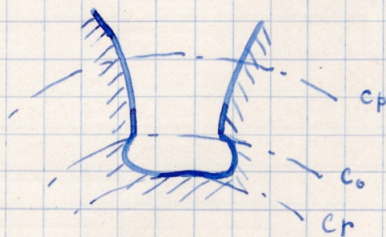
calcul au pas :

$$Z < \frac{0,8 \pi}{1 - \cos \theta}$$

calcul au module :

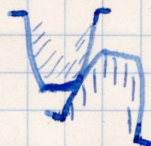
$$Z < \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{1 - \cos \theta}$$

Si $F = M$ et $\theta = 20^\circ \rightarrow Z \leq 33$ dents.



Interférence

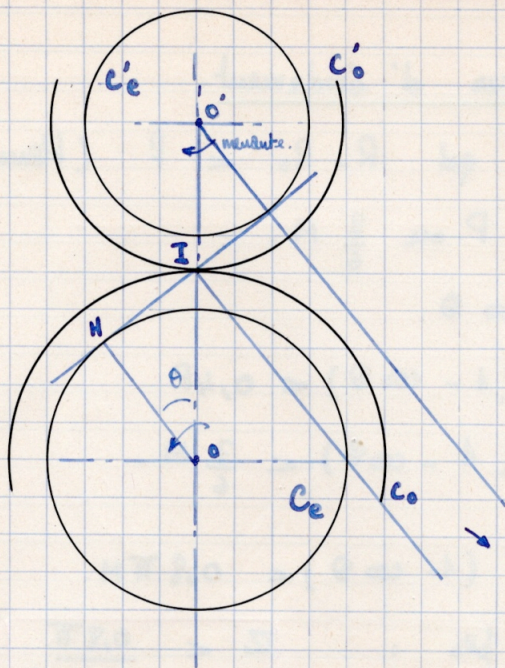
on dit qu'il y a interférence qd 2 profils non conjugués viennent en contact.



Le système peut :

- se bloquer
- se rompre.
- s'user rapidement.

1°/ Interférence avec les profils auxiliaires.



2°/ Interférence des développantes.

(Figure p 46).

Il y a interférence quand M' est extérieur au segment HH' .

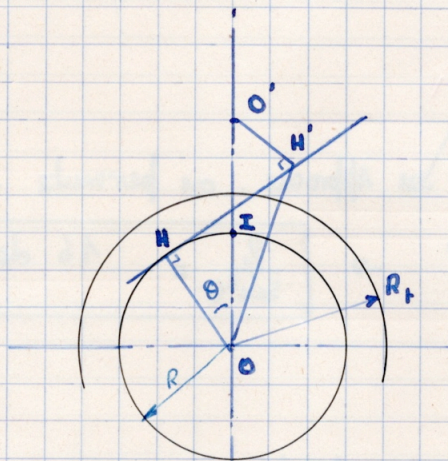
Les arcs (d) et (d') ne sont plus conjugués. Ils sont sécants en I .

L'arc conjugué de (d) est (d'') .

Condition de non interférence :

en retraite :

$$R_+ \leq OH'$$



$$R_+ = R + M$$

$$OH'^2 = OH^2 + HH'^2$$

$$OH = R \cos \theta$$

$$HH' = (R + R') \sin \theta$$

$$(R + M)^2 < R^2 \cos^2 \theta + (R + R')^2 \sin^2 \theta$$

$$4RM + 4M^2 < \sin^2 \theta (4R'^2 + 8RR')$$

$$2R = MZ \quad . \quad 2R' = MZ'$$

$$4M^2 Z + 4M^2 Z' < \sin^2 \theta [M^2 Z'^2 + 2M^2 Z Z']$$

$$(Z'^2 + 2ZZ') \sin^2 \theta - 4(Z + 1) = 0 \quad (1)$$

$$(2) \quad (Z'^2 + 2ZZ') \sin^2 \theta - 4(Z + 1) = 0 \rightarrow \text{hyperbole.}$$

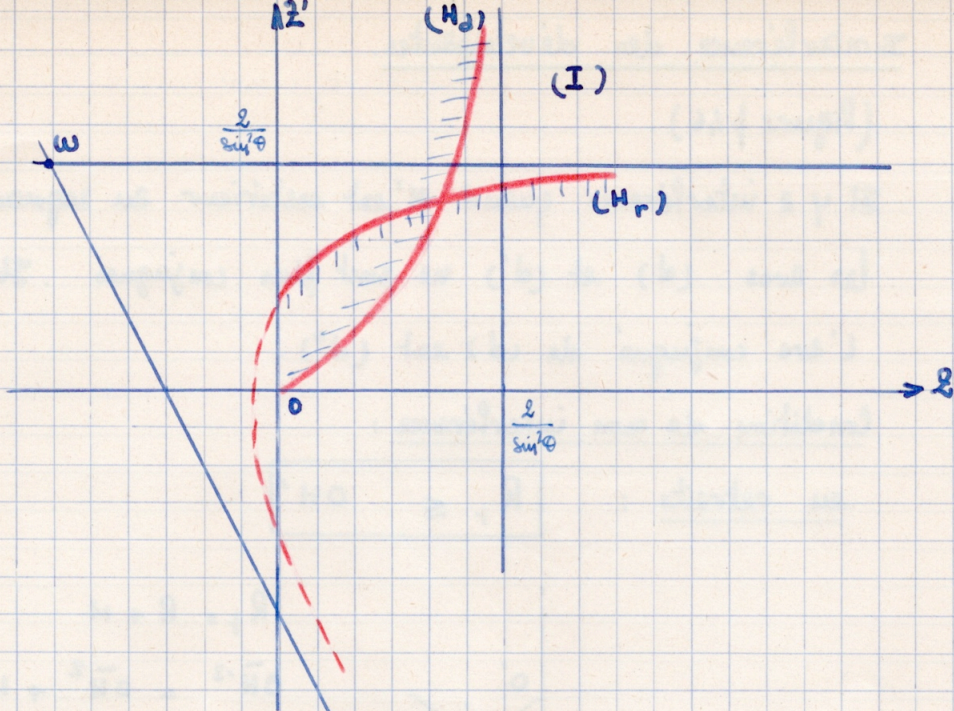
directions asymptotiques :

$$Z'^2 + 2ZZ' = Z'(Z' + 2Z) = 0$$

$$\begin{cases} Z' = 0 \\ Z' + 2Z = 0 \end{cases}$$

Centre :

$$\omega \begin{cases} 2Z' \sin^2 \theta - 4 = 0 \\ 2Z' + 2Z = 0 \\ Z' = \frac{2}{\sin^2 \theta} \end{cases}$$



pour la condition au approche, on permute z et z' .

$$\text{Si } \varphi = 20^\circ \rightarrow \boxed{\frac{z}{\sin^2 \varphi} = 16 \text{ dents}}$$

dentures corrigées :

- * Pour éviter les interférences.
- * Pour éviter les profils auxiliaires.

$$\varphi = 20^\circ \quad F = M \quad P = \frac{7}{6} M.$$

- a) On peut augmenter l'angle de pression : $\varphi = 22^\circ 30'$.
- b) On peut adopter des valeurs particulières pour F et P .

$$\text{dent. normale} \left\{ \begin{array}{l} F = M = 0,318 P \\ P = \frac{7}{6} M. \end{array} \right.$$

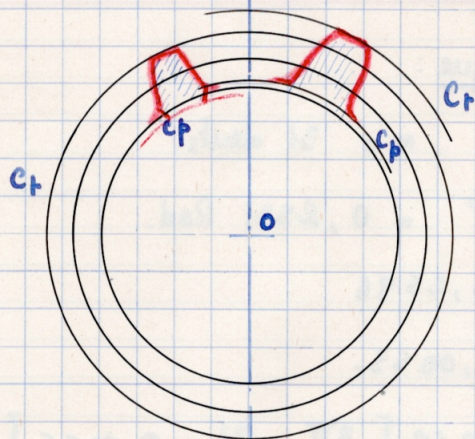
$$\text{dent. "Stub"} \left\{ \begin{array}{l} F = 0,25 P. \\ P = 0,30 P. \end{array} \right.$$

- c) On peut augmenter la hauteur des faces et diminuer la hauteur des flancs.

Méthode des cercles déportés.

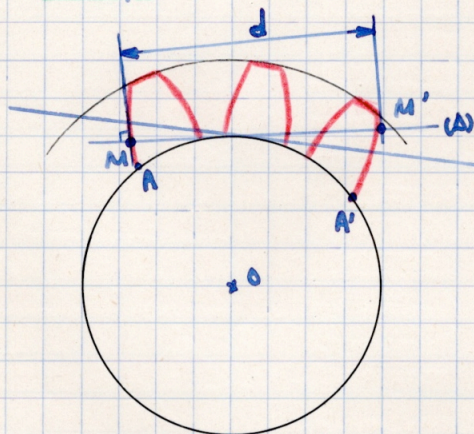
denture normale

denture corrigée



Vérification des engrenages à développantes. (au pied à coulisse)

a/ Principe.



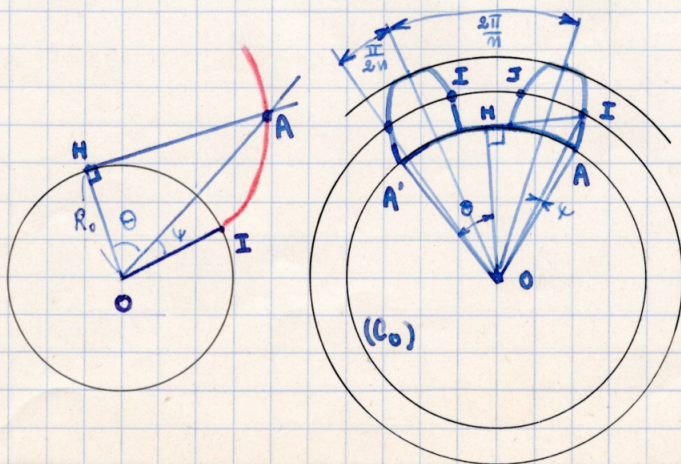
Deux points M et M' de (A) décrivent des développantes de cercle.

La distance MM' entre 2 développ.

est constante = L qd A varie.

$$\widehat{AA'} = \widehat{MM'} = L.$$

b/ Calcul de $\widehat{AA'}$ cas de 2 dents.



$$\widehat{AOI} = \psi$$

$$AH = R_0 \tan \theta$$

$$\widehat{IH} = R_0 \tan \theta = R_0 (\theta + \psi)$$

$$\tan \theta = \theta + \psi.$$

$$\psi = \tan \theta - \theta$$

Fonction involute θ .

$$R = \frac{Mm}{2}$$

$$d = \widehat{AA'} = R \cos \theta \left[\frac{3\pi}{m} + 2\psi \right]$$

$$d = M \cos \theta \left[\frac{3\pi}{2} + m\psi \right] \text{ pour } 1 \text{ crneau.}$$

$$d = M \cos \theta \left[\frac{\pi}{2} + c\pi + m\psi \right] \text{ pour } c \text{ crneau.}$$

Application numérique :

$$M = 1 \quad m = 31 \text{ dents.}$$

$$\theta = 14^\circ 30' = 0,2531 \text{ Rad.}$$

$$\lg \theta = 0,2596$$

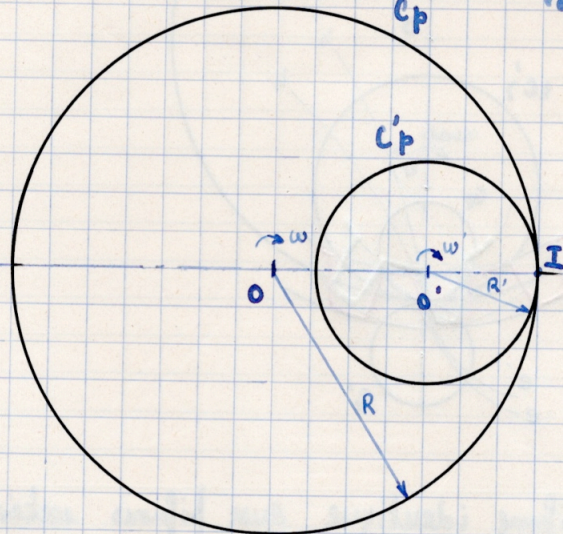
$$\psi = 0,0055.$$

$$d = 0,969 \left[\frac{3\pi}{2} + 31 \times 0,0055 \right] \text{ pour } 1 \text{ crneau.}$$

ENGRENAGES INTERIEURS

I. Roues cylindriques et cylindres primitifs d'un engrenage interieur.

Il existe un pt S de oo' tel que :



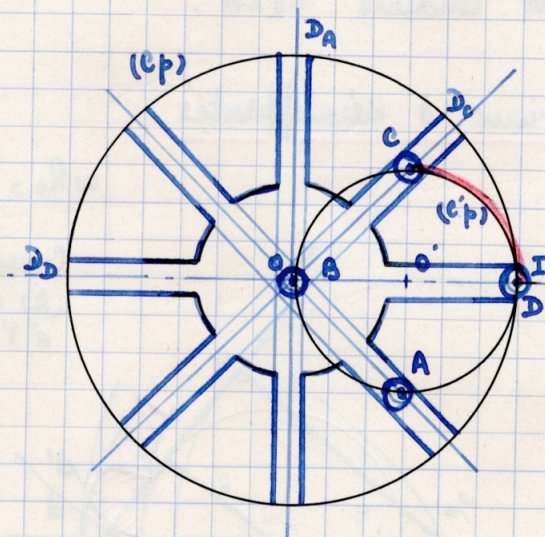
$w \cdot \overline{OI} = w' \cdot \overline{O'I}$
 seulement sans glissement de $e'p$ sur ep

$$wR = w'R'$$

$$\frac{w}{R'} = \frac{w'}{R} = \frac{w-w'}{R'-R} = \frac{w'-w}{R-R'}$$

$$\frac{R}{n'} = \frac{R'}{n} = \frac{R \cdot R'}{n \cdot n'} = \frac{d}{n \cdot n'}$$

II. Engrenage de la Hire.



$$\frac{w'}{w} = 2 \text{ car } R = 2R'$$

(e'/c) : tout point M de (e')
 décrit un diamètre de (c) .

On prend 4 pts A, B, C, D sur $(e'p)$; ces 4 pts sont tels qu'ils décrivent 4 diamètres \perp .

On considère de petits cercles de centres A, B, C, D.

On obtient des rainures que l'on limite à 1 cercle.

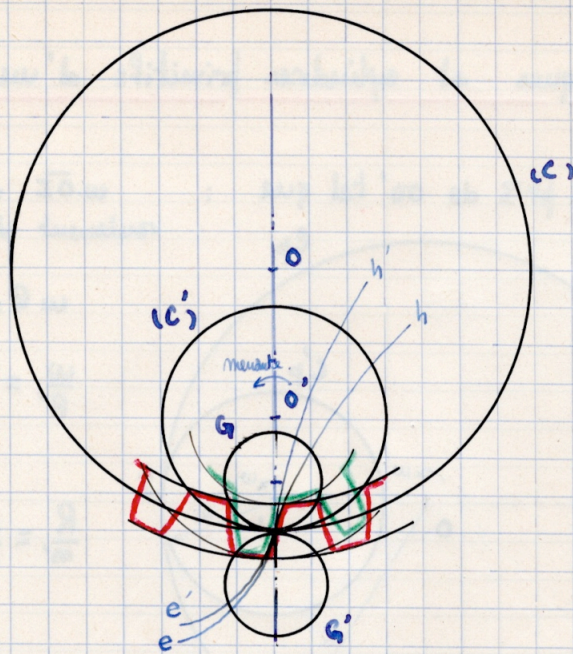
Arc de conduite : \widehat{IC} .

III. Engrenage à profils épicycloïdaux.

Mouvement de \mathcal{I} dans les mouvements:

$$\left. \begin{array}{l} G/c_p \rightarrow \text{hypocycloïde } h' \\ G/c'_p \rightarrow \text{hypo " } h \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} G'/c_p \rightarrow \text{épicycloïde } e \\ G'/c'_p \rightarrow \text{épi " } e' \end{array} \right.$$

Arc de conduite



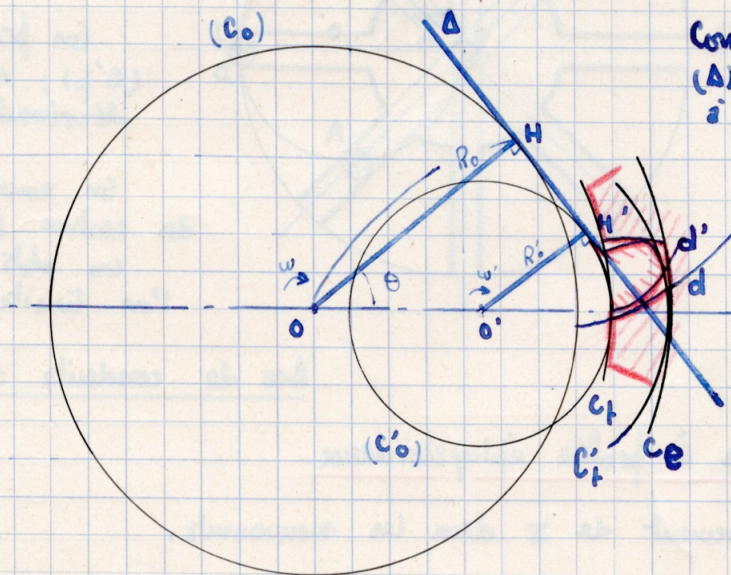
On obtient un pignon identique aux pignons extérieurs, mais la couronne est complémentaire. Les pleins remplacent les creux.

Arce de conduite M_0IM .

Engrenage intérieur à développantes

$$\omega R_0 = \omega' R'_0$$

Considérons un pt M de (A) qui coïncide avec S à l'instant initial.



$M/C_0 \rightarrow$ développante d
 $M/C'_0 \rightarrow$ développante d'

$\theta =$ angle de pression.

Propriétés des engrenages intérieurs à développantes.

$$1^\circ \quad \boxed{\frac{\omega}{\omega'} = \frac{R'_0}{R_0} = \frac{R}{R'}}$$

$$R = OI \quad \text{et} \quad R' = O'I$$

2° θ angle de pression constant.

3° Ligne d'engrènement M₀M₁.

M₀M₁ extérieur à HH'

$$\boxed{\text{Arc de conduite : } \frac{M_0 M_1}{\omega \theta}}$$

En retraite, M peut s'éloigner indéfiniment : pas d'arc de conduite maximum.

Interférences :

Pour les éviter, il faut que M soit extérieur au segment HH'.

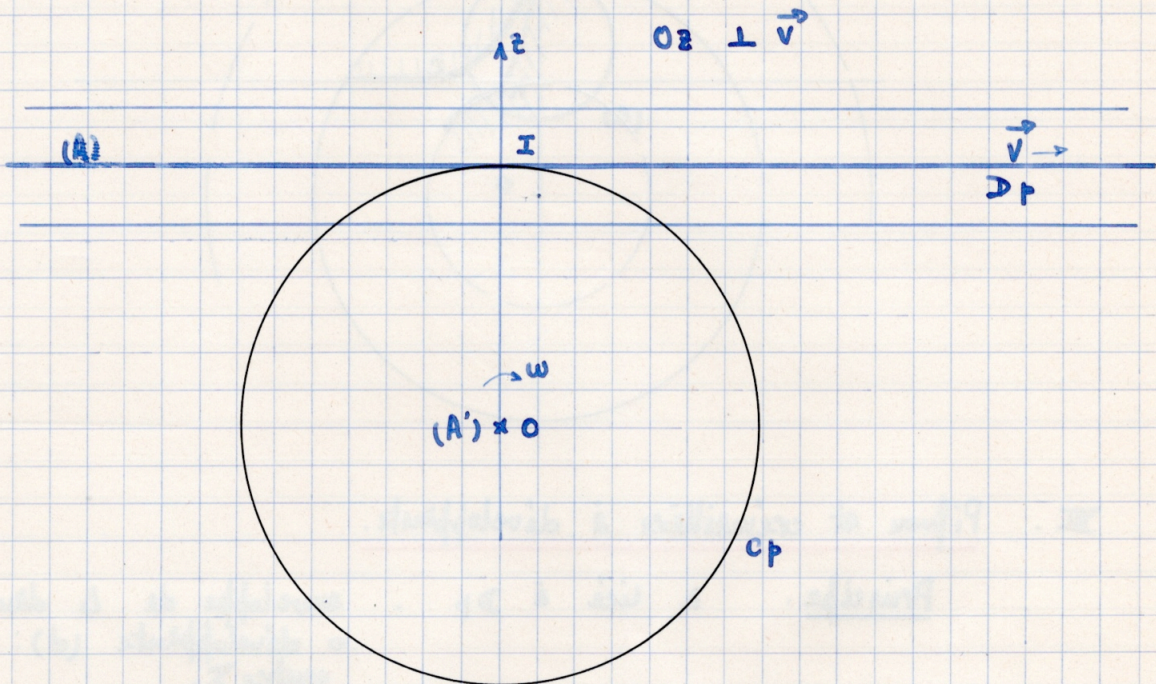
Le calcul est analogue à celui des engrenages extérieurs.

Il existe des corrections de denture et en particulier la méthode des cercles déportés.

PIGNON et CREMAILLERE.

Objet . Surfaces primitives

On a une translation et une rotation \perp .
 Le but de ce système d'engrenage est de transformer le mouvement de rotation en un mouvement de translation \perp .



I sur Oz tel que $w \cdot OI = v$

$$R = OI = \frac{v}{\omega} = \text{cte}$$

Lieu de I dans (A') \rightarrow C_p .

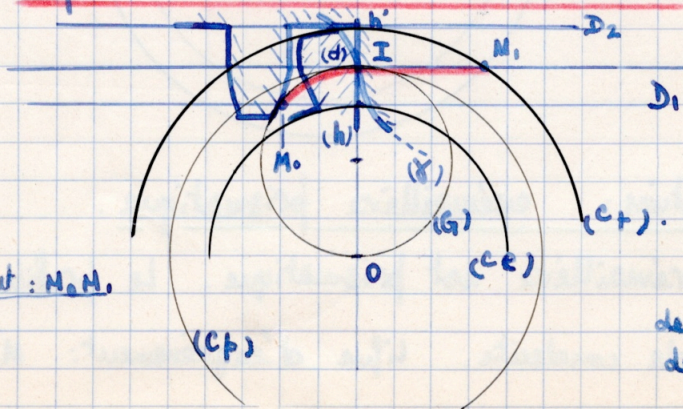
Lieu de I dans (A) \rightarrow D_p .

} Roulement sans glissement de D_p / C_p

Surfaces primitives :
 - cylindre primitif de rayon R
 - plan primitif (P) , de trace D_p .

Application : pignons et crémaillères usuels.

I - Pignon et crémaillère à flancs droits.



Ligne d'engrènement : $M_0 M_1$

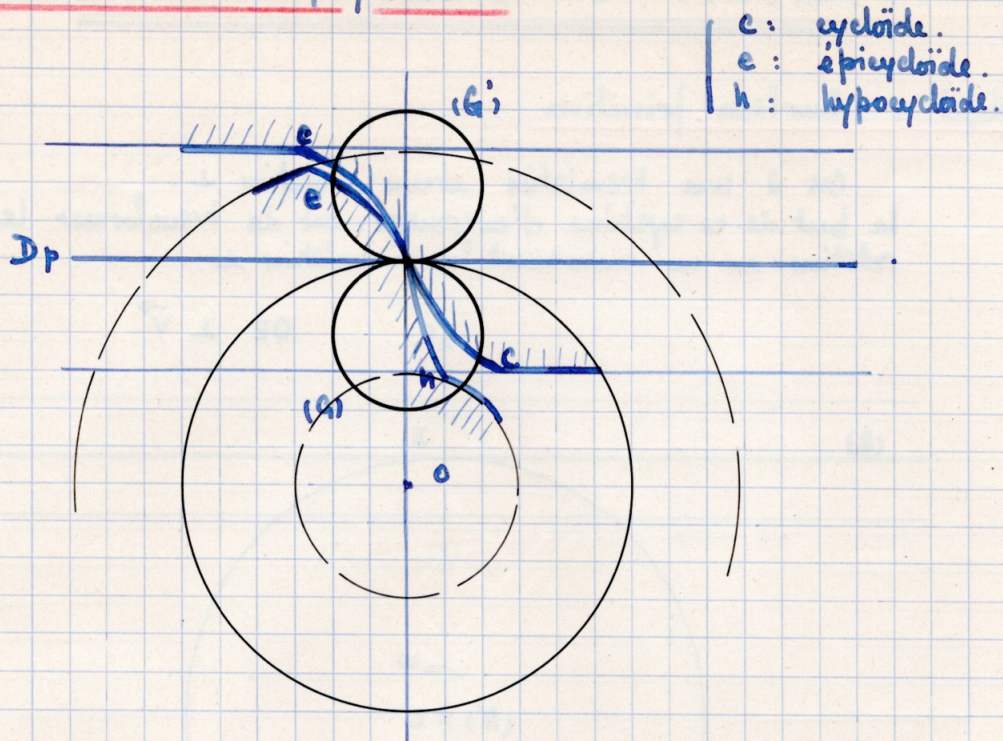
D_p correspond au m^t de La Hire.

$G/C_p \rightarrow$ hypocycloïde (h) réduite à un \emptyset .

$G/D_p \rightarrow$ cycloïde (γ) .

L'enveloppe de h dans le m^t de D_p / C_p est une développante de cercle (d) .

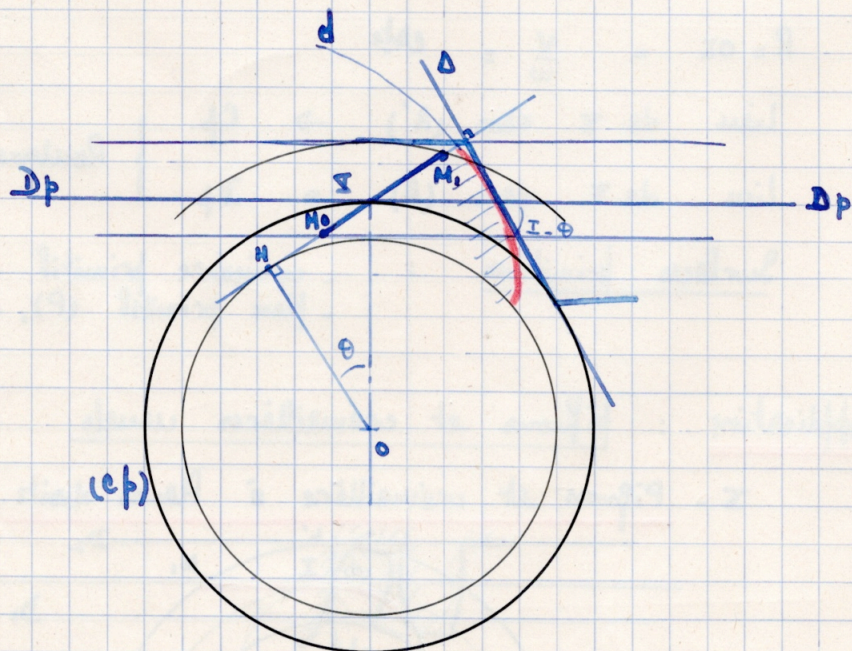
II. A Faces et Plans épicycloïdaux.



c : cycloïde.
e : épicycloïde.
h : hypocycloïde.

III. Pignon et crémaillère à développante.

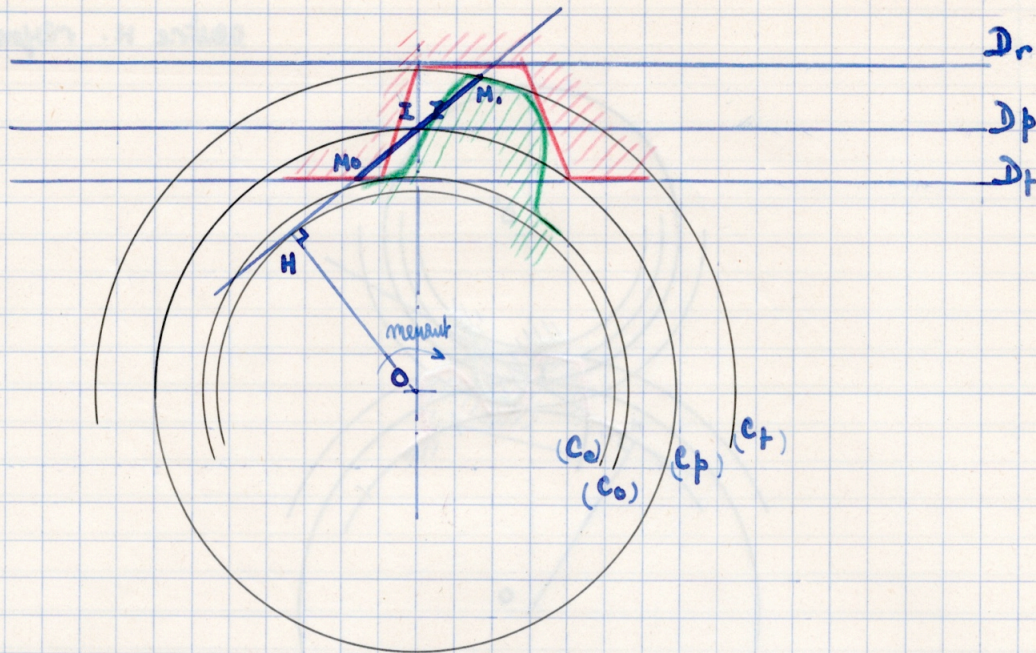
Principe. Δ liée à D_p . enveloppe de Δ dans (D_p/c_p)
 \rightarrow développante (d) : arc de cercle de centre Σ .



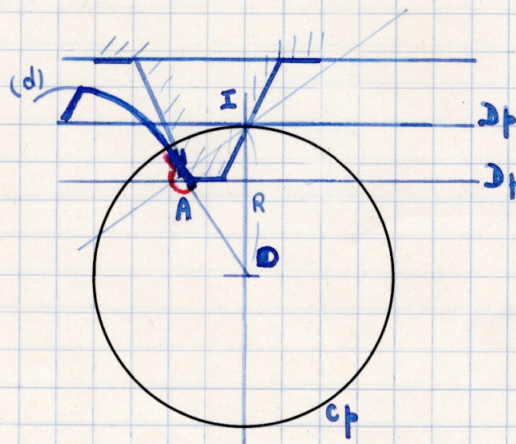
Application: crémaillère prismatique.

La crémaillère est prismatique. Le profil du pignon est à développante.
 Arc de conduite. ligne d'engrènement: $\overline{M_0 M_1}$ $\left\{ \begin{array}{l} M_0 \Sigma \text{ en approche.} \\ \Sigma M \text{ en retraite.} \end{array} \right.$

$M_o M_i$ est limité à H . Arc de conduite : $d = \frac{M_o M_i}{\cos \theta}$



Interférences : Il y a interférence si H est intérieur à la crémaillère. En effet, le point A décrit une courbe (γ) qui interfère avec le profil de la dent du pignon.



Lieu de A dans $D_r/c_p \rightarrow A$ décrit (γ).

Utilisation des profils auxiliaires.

Tracé approché des engrenages.

Méthode de Willis.

On remplace les arcs de développante par des arcs de circonférence. Leur centre est le point H, centre de courbure de l'arc de développante en I.

Ayant construit une dent, on partage la circonférence en n parties égales.

centre H . rayon HI .

