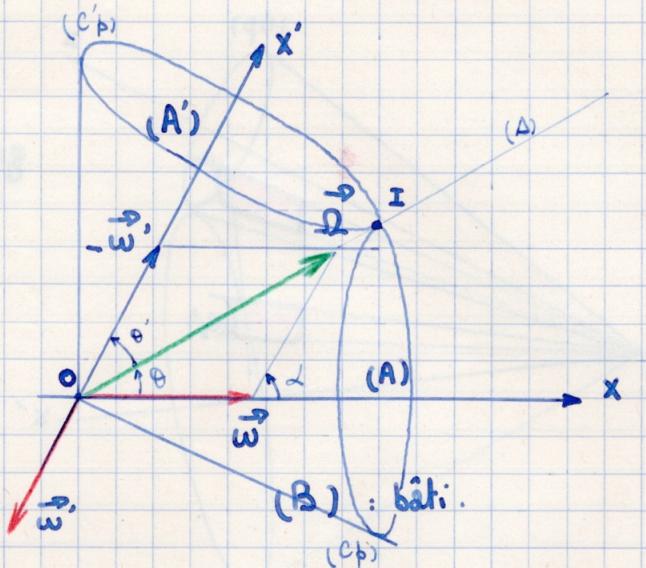


ENGRENAGES à AXES CONCOURANTS

Définition :

Deux solides A et A' tournent autour des axes x et x'
avec des vitesses angulaires $\vec{\omega}$ et $\vec{\omega}'$.



Au cours du mouvement:
il y a roulement sans glissement.

Mouvement relatif de (A/A') \rightarrow surfaces axoides correspondantes.

$$(A/A') = (A/B)(B/A').$$

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_{(Ox)} - \vec{\omega}'_{(Ox')}$$

$$\boxed{\vec{\Omega} = \vec{\omega} - \vec{\omega}'}$$

Surfaces axoides : lieu de (Δ/A) \rightarrow cône C_p
lieu de (Δ/A') \rightarrow cône C'_p .

Calcul de θ et θ' par la relation des sinus :

$$\frac{w}{\sin \theta} = \frac{w'}{\sin \theta} = \frac{R}{\sin \alpha}$$

$$\Omega^2 = w^2 + w'^2 + 2ww' \cos \alpha$$

$\sin \theta = \frac{w' \sin \alpha}{R}$
--

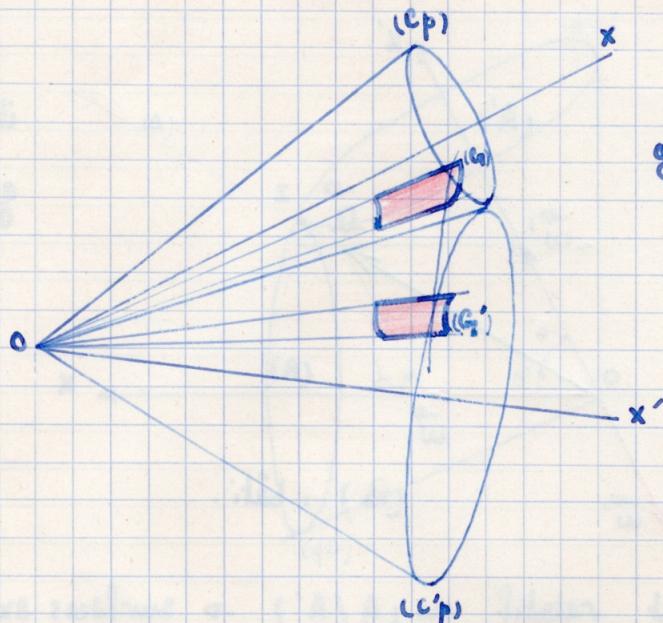
$\sin \theta' = \frac{w \sin \alpha}{R}$
--

Engrenages droits à axes concourants.

Profils conjugués :

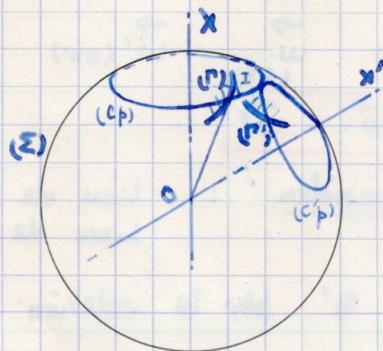
a/ méthode des enveloppes.

On se donne (G) lié à (C') , arbitrairement. C'est une portion de surface conique.



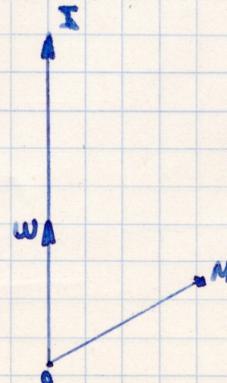
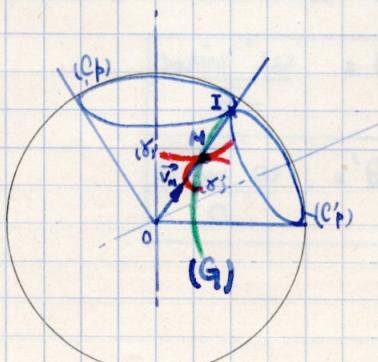
On cherche l'enveloppe G' de G dans le m^t de G/c' .
Il est très difficile d'obtenir, géométriquement ces profils conjugués.

G' : enveloppe de G dans le m^t de G/c' .



On doit résoudre le problème sphérique : enveloppe de (P) dans $(r)/x'$.

b/ Méthode des roulettes.

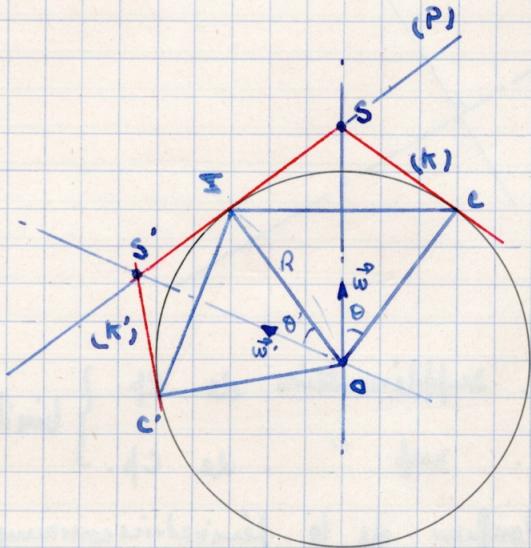


$(G/c_p) \rightarrow M$ décrit (γ) }
 $(G/c'_p) \rightarrow M$ " (γ') . } (γ) et (γ') conjugués.

La vitesse \vec{v}_M \perp au plan IM .

(γ) et (γ') tgts en $M \rightarrow$ conjugués.

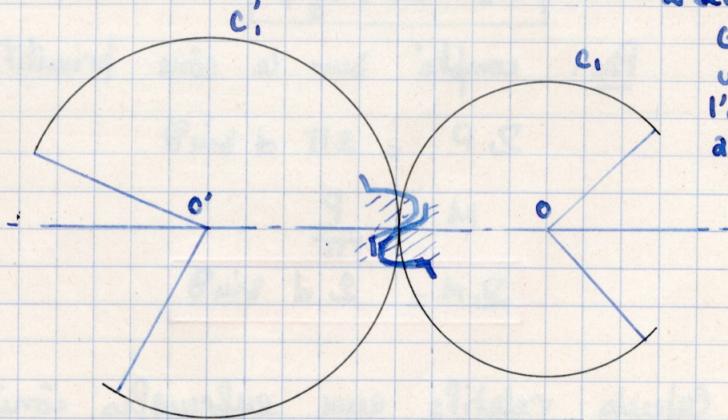
Tracé de Treugold.



On construit (K) et (K') circonscrits à la sphère (E) le long de (c) et (c') . (c) et (c') roulent sans glisser.

On développe (K) et (K') dans leur plan tangent (P) , on obtient les secteurs circulaires.

On est ramené à un tracé plan que l'on fait suffisamment approché.



On fait alors l'opération inverse en reformant les cônes.

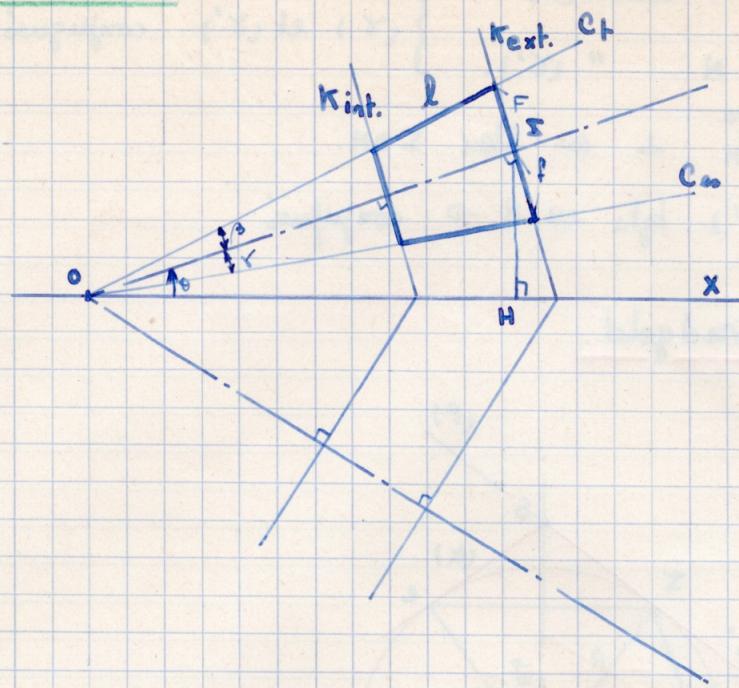
Le taillage se fait au gabarit.

$$C_1 = 2\pi R \sin \theta = PZ \quad \}$$

$$C'_1 = 2\pi R \sin \theta' = PZ' \quad \}$$

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{w'}{w} = \frac{v'}{v}$$

Limite de denture.



K_e : cône ext. supplémentaire de Cp. } limitent une dent.
 K_i : " int. sup " . de Cp. }

$OI = d$: longeur de la périphérie commune.

C ext. Cér. cône évidemment. $(\theta + \beta)$
 C t. cône de tête. $(\theta - \beta)$.

$$F = OI \cdot \operatorname{tg} \beta$$

$$P = OI \cdot \operatorname{tg} \gamma$$

Pas: compté sur le cône primitif et le cône extérieur.

$$\Sigma P = 2\pi d \sin \theta$$

$$M = \frac{P}{\pi}$$

$$\boxed{\Sigma M = 2d \sin \theta}$$

Calculs relatifs aux enveloppes coniques.

Données: Nb de tours N et N'.
 x angle des axes. ($\vec{\omega}, -\vec{\omega}'$).
 $d = OI$ approx.
 P ou M . $\rightarrow P = M\pi$.

Inconnues: θ et θ' . $\frac{1}{2}$ somme des cônes primitifs.

Z et Z' nb de dents.

d_{ex} : long. de la génératrice.

$$\begin{cases} F = M \\ F = \frac{3}{6} M \end{cases}$$

a/ calcul de θ et θ' :

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{N'}{N}$$

$$\frac{\sin \theta - \sin \theta'}{\sin \theta + \sin \theta'} = \frac{N' - N}{N' + N} = \frac{2 \sin \frac{\theta - \theta'}{2} \cdot \cos \frac{\theta + \theta'}{2}}{2 \sin \frac{\theta + \theta'}{2} \cdot \cos \frac{\theta - \theta'}{2}}$$

$$\theta + \theta' = \alpha.$$

axes qcg:

$$\theta + \theta' = \alpha$$

$$\lg \frac{\theta - \theta'}{2} = \lg \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{N' - N}{N' + N}$$

axes rectangulaires: $\lg \theta = \frac{N'}{N} \cdot$

$$\theta + \theta' = \frac{\pi}{2}.$$

b/ Nb de dents:

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{N'}{N} = \frac{N'_i}{N_i} \text{ irréductible.}$$

$$Z = \lambda N_i$$

$$Z' = \lambda N'_i.$$

$$\begin{cases} Z M = 2 d \sin \theta \\ Z' M' = 2 d \sin \theta'. \end{cases}$$

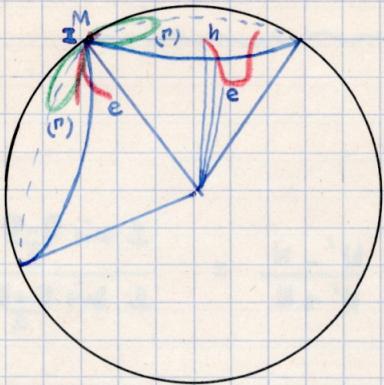
$$\lambda N'_i M = 2 d \sin \theta \rightarrow \lambda = \frac{2 d \sin \theta}{N'_i M} \# \lambda_0, \text{ valeur entière.}$$

d'où $\begin{cases} Z = \lambda_0 N_i \\ Z' = \lambda_0 N'_i \end{cases}$ et $d_{exact} = \frac{Z M}{2 \sin \theta}.$

Engrenages coniques usuels

I- Engrenages coniques à épicycloïde sphérique.

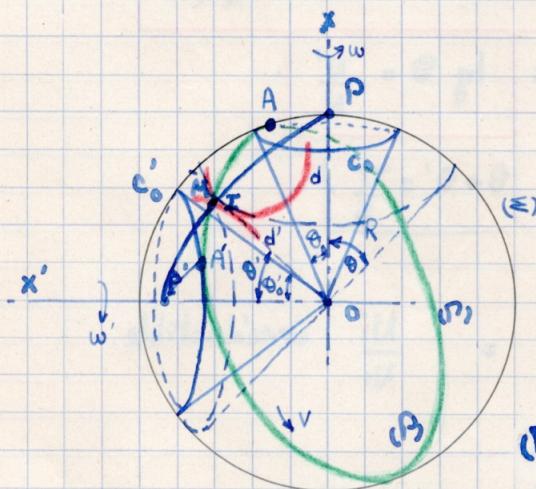
On considère les cercles (Γ) et (Γ') situés sur la sphère (Σ) et tangents aux cercles (C) et (C') .



$$\begin{cases} P/C \rightarrow \text{épicycloïde } (e) \\ P/C' \rightarrow \text{hypocycloïde } (h') \end{cases}$$

$$\begin{cases} P'/C \rightarrow \\ P'/C' \rightarrow \end{cases} \begin{matrix} (e') \\ (h') \end{matrix}$$

II Engrenages coniques à développante sphérique.



Soit le grand cercle (P) qui roule sans glisser sur (C_0) et (C'_0) . (P) tgl (C_0) et (C'_0) .

$$V = wR \sin \theta_0 = w'R \sin \theta'_0$$

$$\frac{w}{w'} = \frac{\sin \theta'_0}{\sin \theta_0}$$

Soit M lié à (P)

$(P)/(C_0) \rightarrow M$ décrit développement sph. (d)

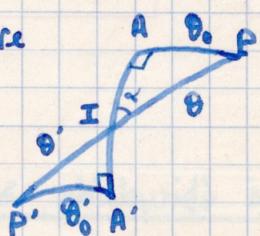
$P/C'_0 \rightarrow M$ " " " " (d')

On a $\vec{v}_M \perp P \rightarrow d$ et d' tang.

Les cones primitifs de l'engrenage : cônes de génératrice OI .

Gn & les triangles sphériques:

$\angle I$: angle du dièdre d'arête OI .



$$\frac{\sin \theta'}{1} = \frac{\sin \theta'_0}{\sin \alpha}$$

$$\frac{\sin \theta}{1} = \frac{\sin \theta_0}{\sin \alpha}$$

$$\rightarrow \frac{\sin \theta'}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta'_0}{\sin \theta_0} = \frac{w}{w'}$$

$\Rightarrow \theta$ et θ' sont les $\frac{1}{2}$ angles des cônes primitifs.

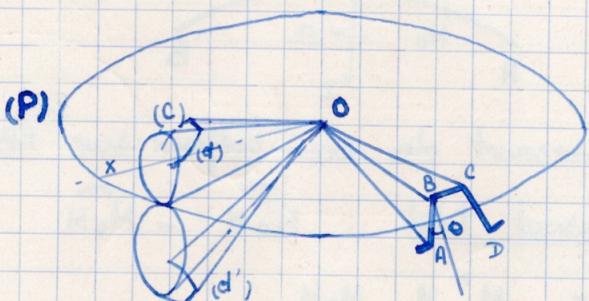
On définit l'angle de pression, complément de $\alpha = \hat{AIP}$ | En modifiant l'angle des axes Ox et Ox' , on obtient toujours des profils conjugués.
Les propriétés sont analogues à celles des engrenages à développante.

Roue plate: si $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{1}{\sin \alpha} \rightarrow \theta' = \alpha$$

III. Engrenages à roues plates pyramidales.

enveloppe du plan OAB dans le m^t (C/P)



θ : angle de pression.

les faces sont des portions de plan inclinées symétriquement.

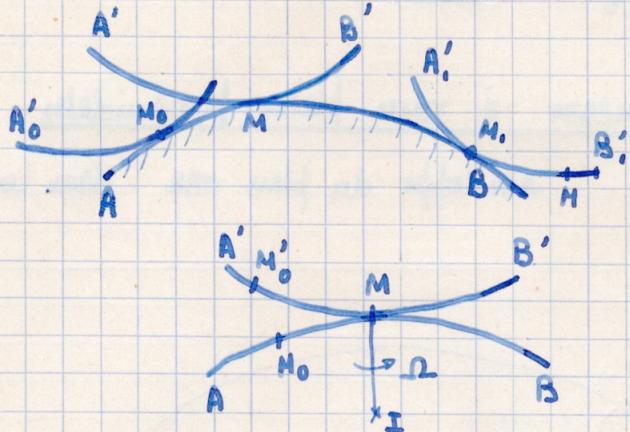
On obtient un profil conjugué en cherchant l'enveloppe du plan OAB dans le m^t de C/P.

C'est une simplification du cas précédent dans laquelle on remplace le profil à point d'inflexion par le tangent au pt d'inflexion.

ENGRENAGES HELICOÏDAUX

5. Glissement dans les engrenages droits

8/ Définition : étant donné le profil logis AB et $A'B'$, si le mt de $A'B'/AB$ le pt M parcourt des arcs inférieurs.



M parcourt des arcs inférieurs sur AB et $A'B'$.

Glissement total : $\vec{M'_0 M} - \vec{M_0 M}$

$$g = M'_0 M \cdot M_0 M$$

vitesse de glissement : $\frac{dg}{dt}$: mt relatif de $A'B'$: rotation $\vec{\Omega}$ en général.

Calcul de la vitesse de glissement dans le cas des engrenages à développantes.

$$\frac{d}{dt} : \text{rot}^m (\Sigma, \Omega) \\ \Omega = \omega + \omega'$$

$$V_g = (\omega + \omega') IM$$

$$\frac{dg}{dt} = (\omega + \omega') IM$$

$$dg = (\omega + \omega') IM dt$$

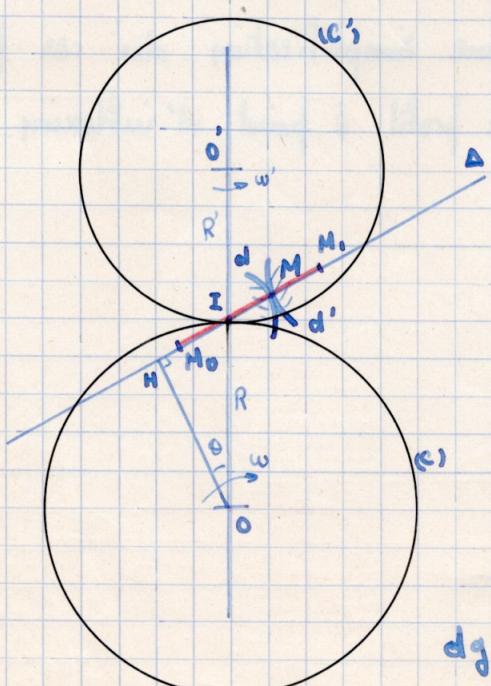
$$dg = \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{1}{R} + \frac{\omega'}{\omega R} \right) \bar{IM} d\bar{IM}$$

changement de variable.

$$\frac{d\bar{IM}}{dt} = V_{M(\text{sur } \Sigma)} = \omega \cdot \bar{OH} \\ = \omega \cdot R \cos \theta$$

$$d\bar{IM} = \omega R \cos \theta dt$$

$$dg = \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \bar{IM} d\bar{IM}$$

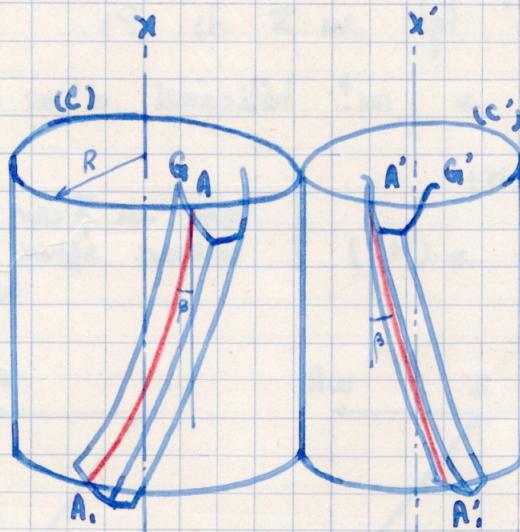


$$\left\{ \begin{array}{l} g_{\text{ret.}} = \int_{\bar{M}_0}^{\bar{M}_1} \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \bar{M} d\bar{M} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \bar{M}_1^2 \\ g_{\text{ap.}} = \frac{1}{2 \cos \theta} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \bar{M}_0^2 \end{array} \right.$$

$$g_{\text{total}} = \frac{1}{2 \cos \theta} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) (\bar{M}_1^2 + \bar{M}_0^2).$$

glissement : pertes par frottement. Il faut diminuer la ligne d'engrenement. \rightarrow on fait appel aux ensembles hélicoïdaux.

II. Engrenage hélicoïdal.

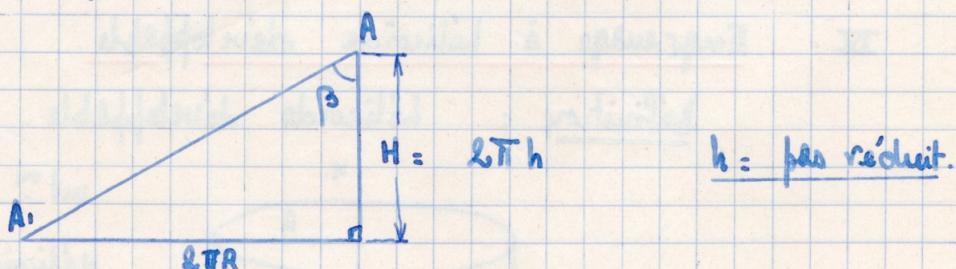


Etant donné 2 cyl. primitifs C et C' et 2 profils conjugués G et G'.

(G) m⁺ hili⁺ / ox

A'A: hélice : ligne de Plane.
A'A'

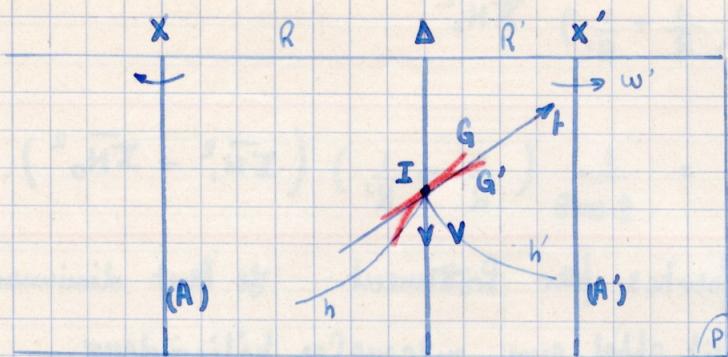
β : angle de spirale des hélices lignes de Plane



$$\tan \beta = \frac{2\pi R}{H} = \frac{R}{h}$$

Pour un pas donné l'angle β dépend du rayon R du cylindre primaire.

III. Engrenage hélicoïdal de White.



On considère que le plan des axes x et x' & les profils conjugués G et G' se déplacent sur A à la vitesse v .

Δ tourne autour de x à w .

Le mouvement de G/A est un mouvement hélicoïdal.

G engendre un hélicoïde (H)
 G' " " " (H').

$$wR = w'R'$$

G et G' tgts en I ds (P).

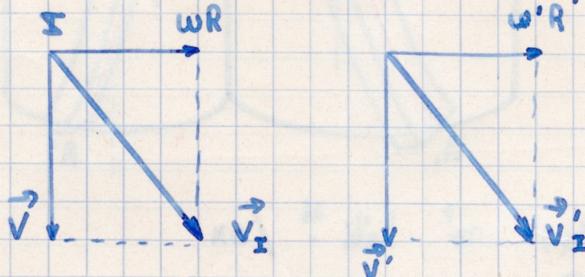
$(G/A) \rightarrow$ mt hélicoïdal d'axe (x)

$G \rightarrow (H)$

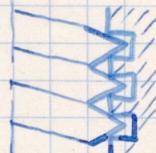
$(G'/A') \rightarrow (H')$ tgts en I car v_I est la résultante de 2 vecteurs égaux dans les 2 cas.

$$wR = w'R'$$

Le seul pt de contact des 2 surfaces étant le pt I situé sur A , le mt s'effectue sans glissement.



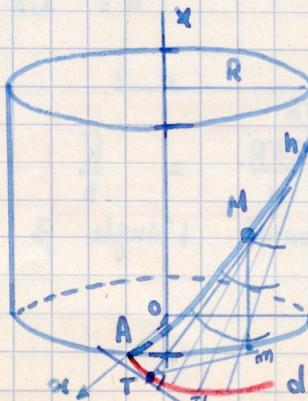
(H) et (H') tgts en I .



profils conjugués : 1 triangle et 1 carré.

IV. Engrenage à hélicoïde développable.

Définition : hélicoïde développable.



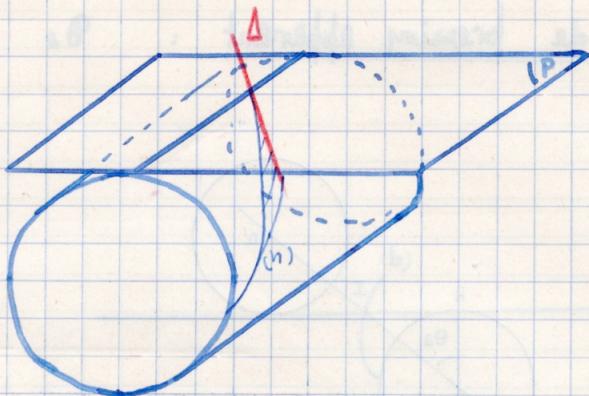
int^m (H) avec (xOy) $\rightarrow (d)$.

Hélicoïde dév : surface engendrée par Mt quand M décrit l'hélice.

L'intersection de H avec des plans \perp à l'axe est une développante de cercle.

Plan tangent en T à Δ : $MT \perp$ plan tangent au cylindre suivant $M\bar{M} \rightarrow (M\bar{M}, MT)$

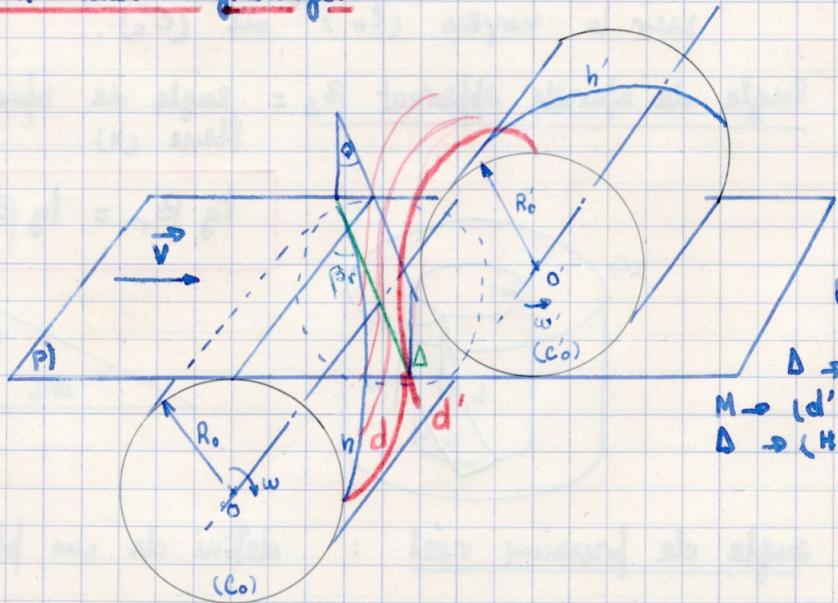
Autre définition :



Un cylindre roule sur un plan P . La dté Δ de P , roule sur le cylindre suivant une hélice (h).

(H) : surface engendrée par (Δ) . (P) sur (G)
= hélicoïde développable.

Application aux engrenages.



$$wR_0 = w'R'_0$$

Prenons Δ ds (P)
Un pt M de Δ
engendre une
développante (d) ds
la mt de (P/C_0)

$\Delta \rightarrow$ hélicoïde développable.
 $M \rightarrow (d')$ ds mt P/C'_0
 $\Delta \rightarrow (H')$

$\left\{ \begin{array}{l} (H) \text{ surf. engendrée par } (\Delta) \text{ ds } (P)/C_0. \\ (H') \text{ " " " } (\Delta) \text{ ds } (P/C'_0) \end{array} \right.$

(H) et (H') conjuguées : une dté commune (Δ) tangente le long de Δ .

plan tgt \rightarrow plan \perp à P le long de Δ .

Propriétés :

$$\rightarrow \frac{w'}{w} = \frac{R_0}{R'_0}$$

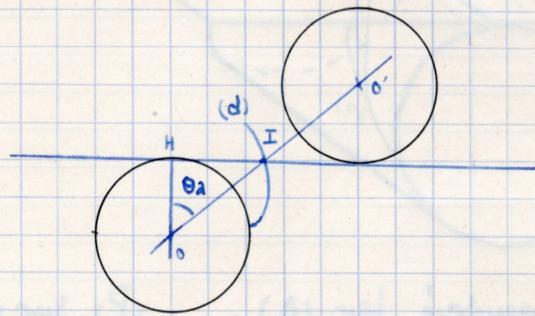
\rightarrow contact linéaire (P) : plan d'engrenement.

\rightarrow cylindres primitifs : $OI = R$
 $O'I' = R'$

$$\frac{OI}{O'I} = \frac{R}{R'} = \frac{R_0}{R'_0} = \frac{w}{w'}$$

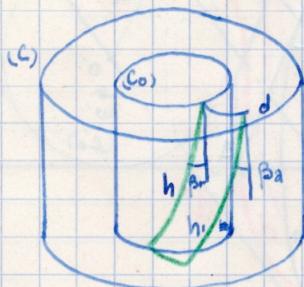
(C_0) et (C'_0) \rightarrow moyaux des hélicoïdes.

\Rightarrow angle de pression apparent : θ_a



\Rightarrow angle de spirale réel : $\beta_r = (\Delta, x)$ x : génératrice du cylindre.
sur le moyen (C_0) ou (C'_0) .

\Rightarrow angle de spirale apparent $\beta_a =$ angle de spirale de l'hélice ligne de flanc (h) .



$$\operatorname{tg} \beta_r = \operatorname{tg} \beta_a \cdot \cos \theta_a$$

$$\operatorname{tg} \beta_r = \frac{2\pi R_0}{H \cos \theta_a}$$

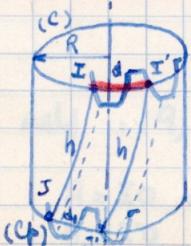
$$\operatorname{tg} \beta_a = \frac{2\pi R}{H}$$

\Rightarrow angle de pression réel : défini sur un plan \perp à (Δ) .

L'enroulage à hélicoïde développable a des propriétés analogues aux prop. des enroulages à développables.

On peut modifier la distance des axes : les profils restent conjugués.

Pas circonférentiel et module.



$$\text{Pas apparent } P_a = \widehat{II'}$$

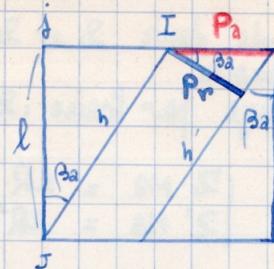
$$Z P_a = 2\pi R$$

$$\text{module apparent: } M_a = \frac{P_a}{\pi}$$

$$Z Ma = 2R$$

$$Pr = Pa \cos \beta_a$$

$$Mr = Ma \cos \beta_a$$



Continuité de conduite : le profil (d.) est en avance de Ij sur le profil (d.).

$$\text{aire de conduite total} = \text{aire de conduite } d + I_j$$

$$I_j = l \operatorname{tg} \beta_a$$

$$a = a_0 + l \operatorname{tg} \beta_a$$

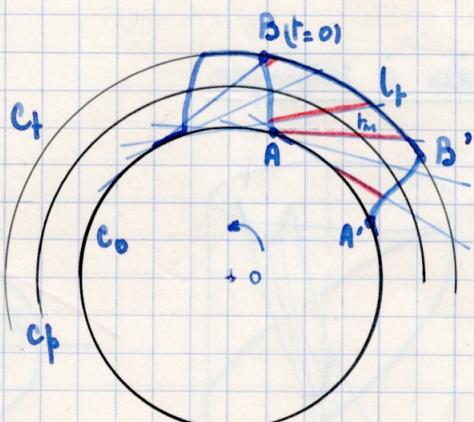
On peut rendre a aussi petit que l'on veut, ce qui permet de réduire le nb de dents.

$$Pa < l \operatorname{tg} \beta_a.$$

On réduit considérablement le nb de dents.

Longueur d'engrenement.

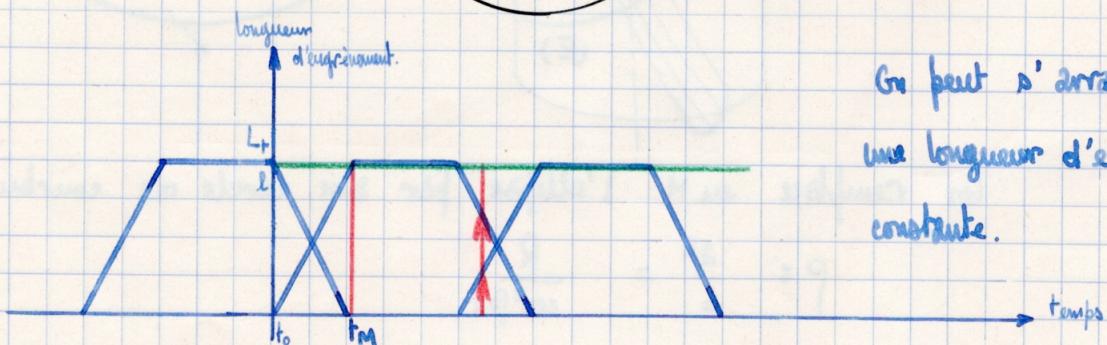
Les 2 profils conjugués sont tournés suivant une portion de la génératrice commune (Δ).



Projetons l'engrenage sur un plan \perp à son axe.

Les génératrices se projettent suivant des droites latères à (l_0) .

La longueur d'engrenement augmente linéairement de $t=0$ à t_{M_0} puis elle est nulle et décroît.



On peut s'arranger pour avoir une longueur d'engrenement totale constante.

Calculs relatifs à un engrenage hélicoïdal au module.

Données : N et N' nb de tours.

et approche des racines.

module réel $Mr = M$

β_a = angle de spirale des hélices.

Inconnues: Nb de dents Z et Z' .
d enracine.
taille par fraise : Z_1 et Z'_1 ; roues fictives équivalentes.

Formules: $\begin{cases} Z \cdot M_2 = 2R \\ Z' \cdot M_2 = 2R' \end{cases}$

$$\frac{R}{R'} = \frac{N'}{N} \rightarrow \frac{Z}{Z'} = \frac{N'}{N} = \frac{N'_1}{N_1} \text{ irréductible.}$$

$$\begin{cases} Z = \lambda N'_1 \\ Z' = \lambda N_1 \end{cases}$$

$$2d = 2R + 2R' = \lambda M_2 (N'_1 + N_1)$$

$$2d = \lambda M_2 (N'_1 + N_1) = \frac{\lambda M_r}{\cos \beta_a} (N'_1 + N_1).$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{2d \cos \beta_a}{M_r (N'_1 + N_1)} \rightarrow \lambda_0 \text{ entier.}$$

$$Z_1 = \lambda_0 N'_1$$

$$D = 2R = M_2 Z$$

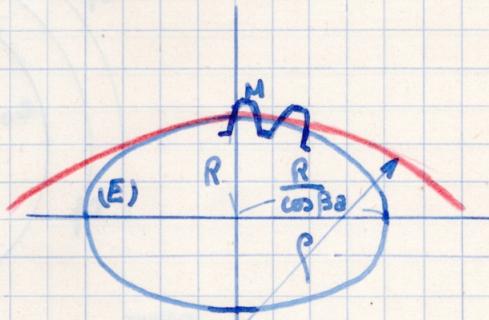
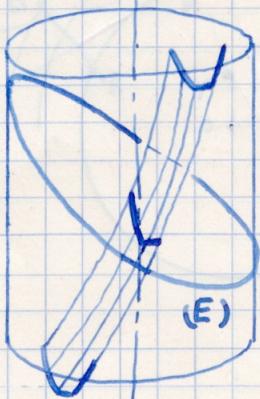
$$Z'_1 = \lambda_0 N_1$$

$$D' = 2R' = M_2 Z'$$

$$\left. \begin{array}{l} 2d = 2(R+R') \end{array} \right\}$$

Nombre des fraises à employer.

On coupe le dent par un plan \perp à l'hélice.
La section du cylindre est une ellipse (E) qui admet M comme sommet du petit axe.



On remplace au M l'ellipse par son cercle de courbure.

$$P = \frac{a^2}{b} = \frac{R}{\cos^2 \beta_a}$$

$$2P = \frac{2R}{\cos^2 \beta_a} = \frac{Z M_2}{\cos^2 \beta_a} = \frac{Z M}{\cos^3 \beta_a}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z}{\cos^3 \beta_a} \\ Z'_1 &= \frac{Z'}{\cos^3 \beta_a} \end{aligned}}$$

Application numérique :

$$\left| \begin{array}{l} N = 200 \\ N' = 240 \\ d = 170 \text{ mm} \\ \beta_a = 25^\circ \end{array} \right.$$

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{N'}{N} = \frac{240}{200} = 1,2 = \frac{6}{5}$$

$$Z = 6\lambda$$

$$Z' = 5\lambda$$

$$ld = \frac{M}{\cos \beta_a} \lambda (N_i + N_f)$$

$$ld = \frac{M}{\cos \beta_a} (Z + Z').$$

$$\rightarrow 2 \times 170 = \frac{4 \cdot 11 \lambda}{\cos 25^\circ}$$

$$\lambda = \frac{2 \times 170 \times \cos 25^\circ}{44} \rightarrow \approx 7.$$

$Z = 42 \text{ dents}$
$Z' = 35 \text{ dents}$

$$D = 2R = M_d Z = \frac{4 \cdot 42}{0,306} = 154,35 \text{ mm}$$

$$D' = \frac{4 \cdot 35}{0,306} = 185,22 \text{ mm}.$$

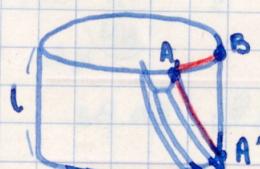
$$Z_i = \frac{42}{\cos^3 25^\circ} = 56 \text{ dents}$$

$$Z'_i = \frac{35}{\cos^3 25^\circ} = 47 \text{ dents.}$$

Remarque : on peut se donner d exacte et calculer β_a approché.

On calcule β_a exacte par $\cos \beta_a = \frac{M (Z + Z')}{ld}$.

Calcul de la largeur l de la roue dentée.



B projection de A'.

$$AB > P$$

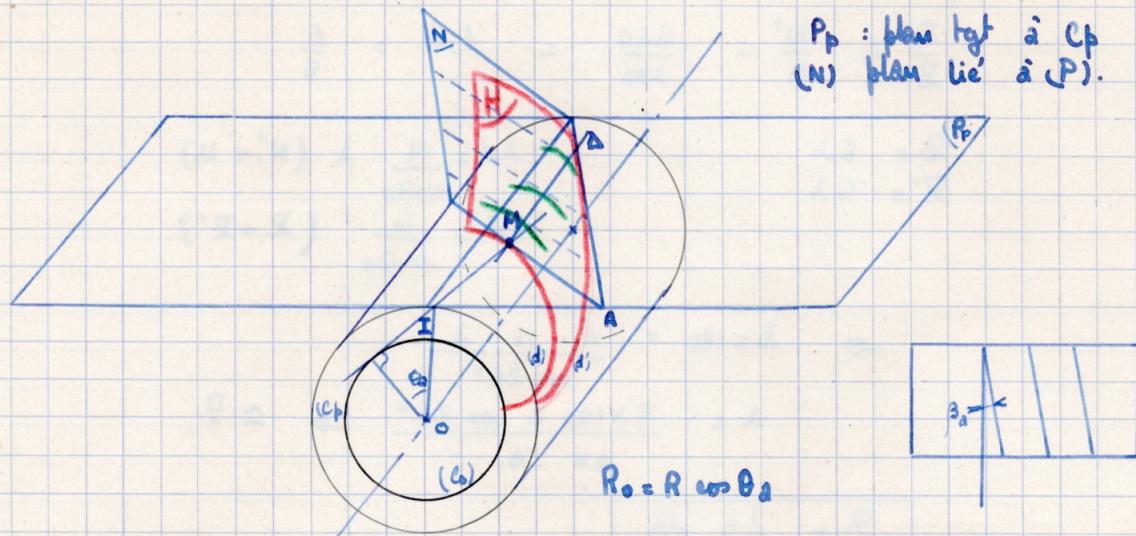
$$\hat{AB} = l \operatorname{ctg} \beta_a > M_d \bar{\pi} = \frac{\pi M_r}{\cos \beta_a}$$

$l > \frac{\pi M_r}{\sin \beta_a}$

$$\text{Ex. du cas précédent : } l > \frac{\pi \times d}{\sin 25^\circ} = 29 \text{ mm.}$$

$$\Rightarrow l = 30 \text{ mm.}$$

Engrenage filet - crémillière à hélicoïde développable.

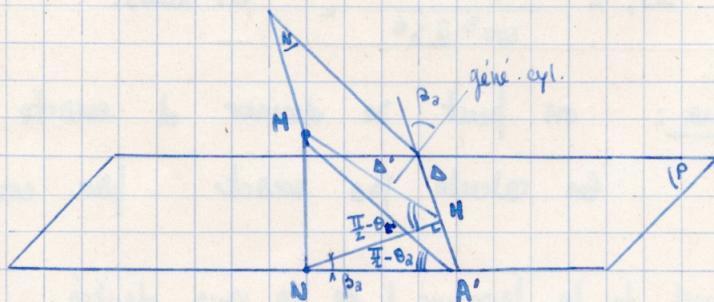


P_p : plan tangent à (C_p)
 (N) plan lié à (P) .

$$R_0 = R \cos \theta_2$$

L'enveloppe de (N) dans (P/c) \rightarrow hélicoïde (H) .
L'enveloppe des cônes tels que Δ' est une développante de noyau C_0 .
En donnant à (d) un mouvement hélicoïdal on enveloppe le plan (N) et on délimite un hélicoïde développable.

Angle de pression réel = complément de l'angle aigu des 2 plans (N) et (P_p)



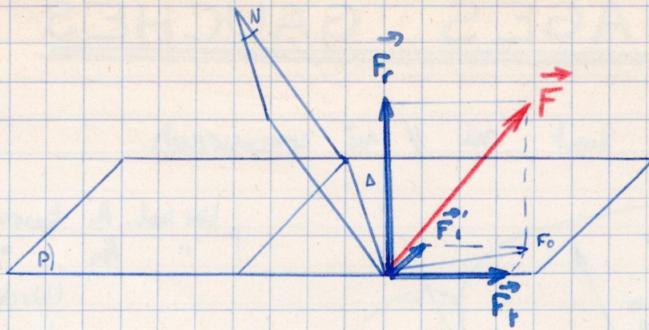
$$\operatorname{tg} \theta_r = \frac{NH}{NM} = \frac{NA'}{NN} \cos \beta_2$$

$$\operatorname{tg} \theta_r = \operatorname{tg} \theta_2 \cdot \cos \beta_2$$

Effort sur la denture.

\vec{F} sur denture est \perp à (N) .

$$\vec{F} = \begin{cases} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{t1} \\ \vec{F}_{t2} \\ \vec{F}_r \end{array} \right.$$

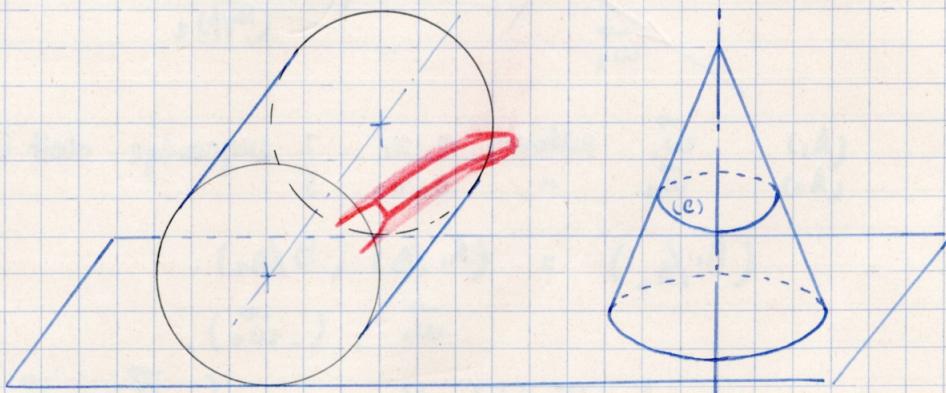


Il existe une poussée axiale \vec{F}_t' \rightarrow butée.
on peut éviter cela en employant les engrenages à chevrons. (difficile à tailler)

Engrenages spiraux

Sur un engrange spiral, la ligne de flanc est que.

Exemple : denture Gleason.

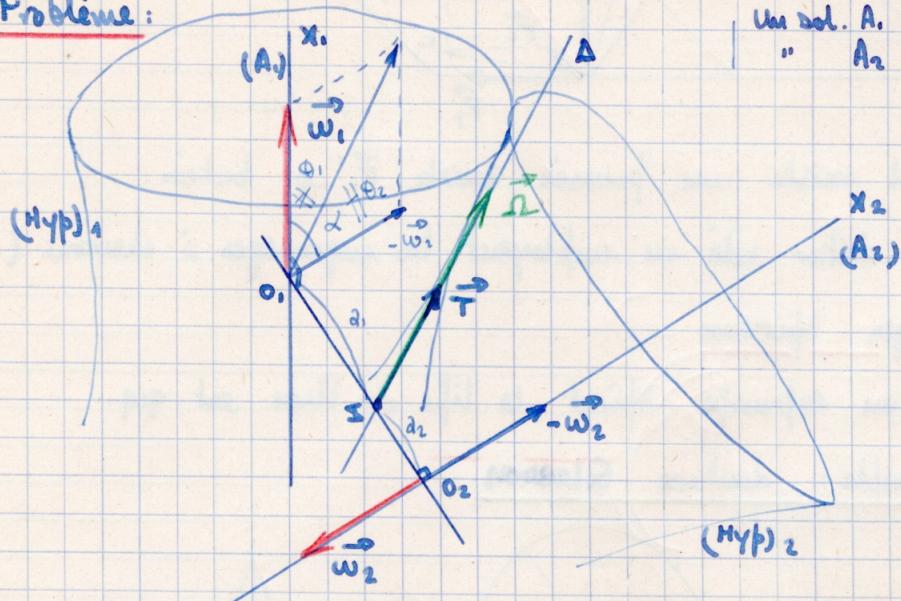


La ligne de flanc est un arc de cercle de la "crémallière" (c).

ENGRENAGES GAUCHES

Les axes ne sont ni // ni concourants.

Problème:



Un sol. A. tourne autour de $O_1, x_1 \rightarrow w_1$,
" A2 " " " " $O_2, x_2 \rightarrow w_2$.

Cherchons un engrenage qui lie les deux mouvements.

(A₁) \vec{w}_1 autour O_1, x_1 . } engrenage doit lier les 2 mouv.
(A₂) \vec{w}_2 " O_2, x_2 .

$$(A_1/A_2) = (A_1/B) (B/A_2).$$

$$\vec{w}_1, (-\vec{w}_2).$$

mouv! hélicoïdal d'axe (Δ) $\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega} = \vec{w}_1 - \vec{w}_2 \\ \frac{d_1}{d_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \end{array} \right.$

En effet, on a: $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{w_2}{w_1}$

$$\frac{w_2}{\sin \theta_2} = \frac{w_1}{\sin \theta_1} = \frac{\Omega}{\sin \alpha}$$

$$\frac{2, \cos \theta_1}{d_2 \cos \theta_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{w_2}{w_1} \rightarrow B, \cos \theta_1 w_1 = d_2 \cos \theta_2 w_2.$$

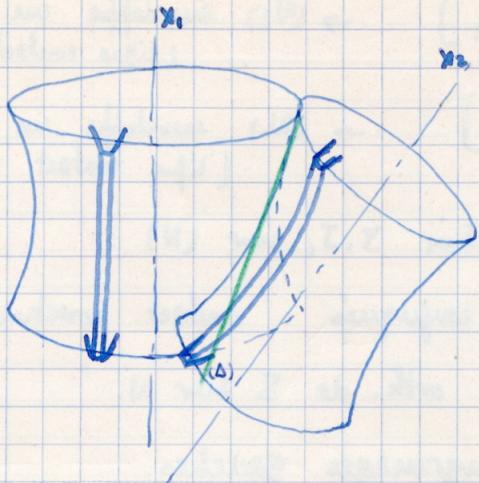
$$T = \frac{\Omega d \sin \theta_1 \sin \theta_2}{\sin \alpha}$$

Surfaces cycloïdales.

lieu de $\Delta/A_1 \rightarrow$ hyperboleïde de rév. " autour x_1 } tang le
" $\Delta/A_2 \rightarrow$ " " " " " " " " x_2 long de Δ .

Il y a glissement automatiquement.

I. Engrenage de Bézanger.

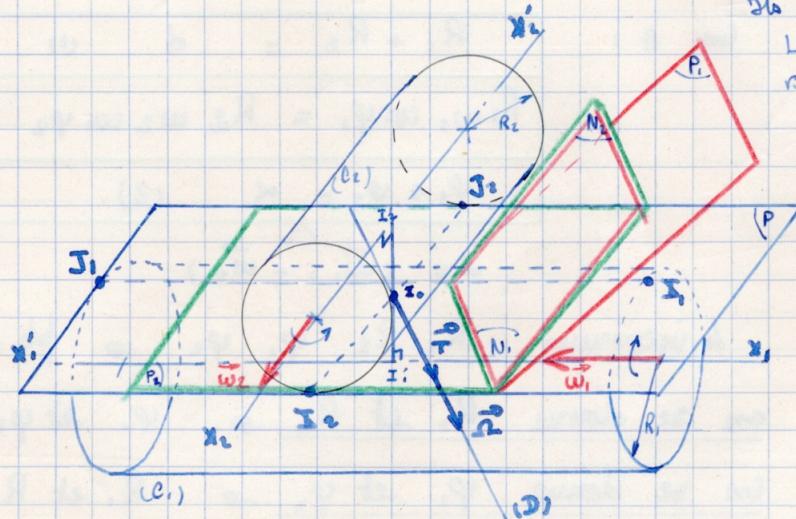


$$\vec{V}_g = \vec{T} \quad (\text{sur } \Delta)$$

$$\vec{V}_g = \vec{T} + \vec{\omega} \wedge \vec{IM}$$

minimum sur (Δ) .

II. Engrenage à hélicoïde développable.



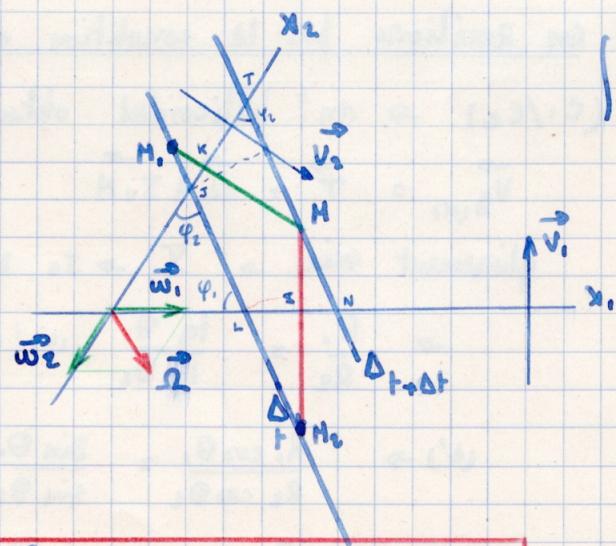
Etant données deux cylindres C_1 et C_2 qui tournent à des vitesses w_1 et w_2 . Ils restent tangents à (P).

Le dièdre (N_1, P_1) est assujetti à rester dans P . Il est entraîné par le cylindre C_1 .

De même le dièdre (N_2, P_2) est entraîné par C_2 et P_2 est assujetti à rester dans P .

Les deux plans N_1 et N_2 sont assujettis à rester en contact.

M décrit MM_1 et MM_2 dans les solides liés à x_1 et à x_2 .



$$V_2 = w_2 R_2$$

$$V_1 = w_1 R_1$$

$$\begin{cases} M_2 H = V_2 \Delta t = w_2 R_2 \Delta t \\ M_1 M = \dots = w_1 R_1 \Delta t \end{cases}$$

$$\frac{M_2 H}{M_1 M} = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} = \frac{w_2 R_2}{w_1 R_1}$$

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{R_2 \cos \varphi_2}{R_1 \cos \varphi_1} = \frac{c_1}{c_2}$$

Surfaces conjuguées

dans m¹: $\left[\frac{(P_0, N_2)}{C_2} \right] \rightarrow (N_2)$ enveloppe un hélicoïde (H_2).
 (ligne contact l_2)

• • $\left[\frac{(P_1, N_1)}{C_1} \right] \rightarrow (N_1)$ enveloppe un hélicoïde (H_1).
 (ligne contact l_1).

projection I, J, sur (N)

(H_1) et (H_2) conjugués : contact ponctuel à l'int^e de l_1 et l_2 .

H proj. orth. de S sur N.

Calculs relatifs aux engrenages gauches.

C_1 et C_2 sont dits cylindres primitifs bien que ce soient des hyperboloides de révolution.

On a :

$$R_1 + R_2 = d \quad (1)$$

$$R_1 w_1 \cos \varphi_1 = R_2 w_2 \cos \varphi_2 \quad (2)$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \alpha \quad (3).$$

$$\alpha = (\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2)$$

4 inconnues : $R_1, R_2, \varphi_1, \varphi_2 \rightarrow$ pb indéterminé.

a) on se donne R_1 et $R_2 \rightarrow \varphi_1$ et φ_2 calculables.

b) on se donne φ_1 et $\varphi_2 \rightarrow R_1$ et R_2

c) on améliore par la condition dite de glissement minimum

$(C_1/C_2) \rightarrow$ m¹: hélicoïdal obtenu en composant $\vec{\omega}_1$ et $-\vec{\omega}_2$

$$\vec{v}_{g_{(H_1)}} = \vec{T} + \vec{\Omega} \wedge \vec{I}_0 M$$

glissement mini $\rightarrow \vec{I} \rightarrow I_0$ sur l'axe hélicoïdal D.

$$\rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} \quad (4) \text{ (condition de glissement minimum).}$$

$$(4') \rightarrow \frac{R_1 \cos \theta_1}{R_2 \cos \theta_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{w_2}{w_1}$$

$$(4'') \rightarrow R_1 w_1 \cos \theta_1 = R_2 w_2 \cos \theta_2$$

$$(3) \rightarrow R_1 w_1 \cos \varphi_1 = R_2 w_2 \cos \varphi_2.$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \theta_1 + \theta_2 = \alpha.$$

En définitive :

$$\varphi_1 = \theta_1$$

$$\varphi_2 = \theta_2.$$

Conditions pour que les roues hélicoïdales soient conjuguées.

1/

$$(C_1) \text{ et } (C_2) \text{ enveloppes de } (N) \rightarrow N/c_1 \rightarrow H_1 \\ N/c_2 \rightarrow H_2$$

$N'c_1 \rightarrow H'_1$
 $N'c_2 \rightarrow H'_2$.

(N) et (N') distants de
et cette distance
est égale au pas.

$\rightarrow 1^{\circ}/$ même pas normal ou réel :

$$P_r = \pi M_r = \text{distance de } (\Delta) \text{ et } \Delta'.$$

$$\rightarrow m \text{ module réel } M_r.$$

$\rightarrow 2^{\circ}/$ même angle de pression réel.

$$\text{complément de l'angle dièdre } (N, P) \rightarrow \theta_2.$$

$\rightarrow 3^{\circ}/$ modules apparents \neq .

$$M_{1a} = \frac{M_r}{\cos \theta_1} \neq M_{2a} = \frac{M_r}{\cos \theta_2}$$

$\rightarrow 4^{\circ}/$ Nombre de dents

$$2R_1 = Z_1 \cdot M_{1a}$$

$$2R_2 = Z_2 \cdot M_{2a}$$

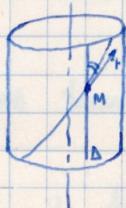
Angles de spirale .

cas général : φ_1 et φ_2 .

gliss. mini : θ_1 et θ_2 .

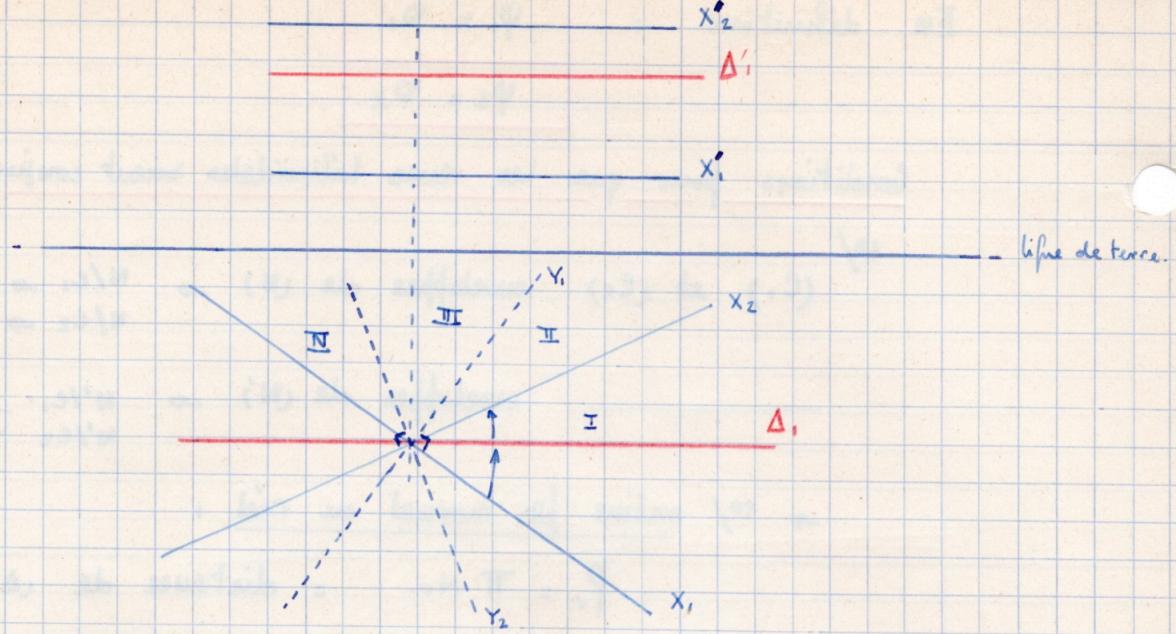
$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2R_1 \cos \theta_1}{2R_2 \cos \theta_2} = \frac{w_2}{w_1}$$

Sens des hélicoïdes:



hélice à drte. L'angle signe de la tangente avec A s'obtient en faisant tourner A de gauche à droite.

Faisons une figure en descriptive:



	(H ₁)	(H ₂)
Région I	G	G
II	G	D
III	D	D
IV	D	G

Il faut considérer les angles de Δ_1 avec x_1 et x_2 .

Si axes //, (H_1) et (H_2) de sens contraires.

Si axes orthogonaux: (H_1) et (H_2) de mêmes sens.

Calculs relatifs aux engrenages gauches.

Problème I.

Données: $\frac{N_1}{N_2} = \frac{3}{5}$ (par ex.)

angle des axes $\alpha = 60^\circ$.

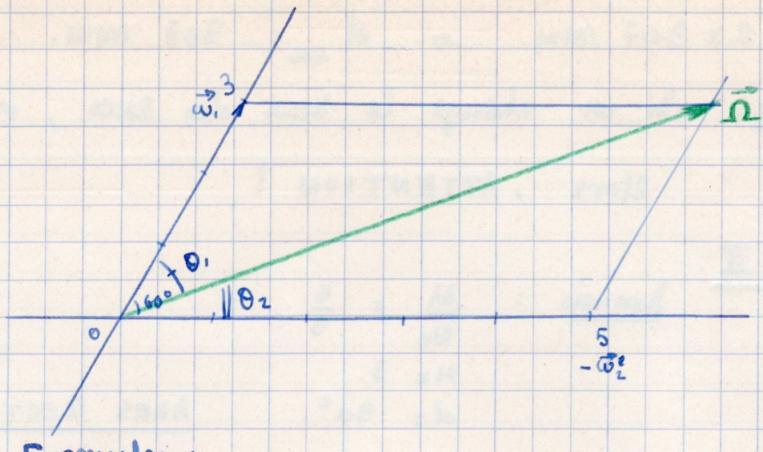
distance approx. des axes : $d = 300 \text{ mm}$.

$M = 4$

conditions de glissement minimum.

Inconnues:

Z_1 et Z_2 nb de dents
angles de spirale Θ_1 et Θ_2 .
distance entre des axes.



Formules :

$$\frac{\sin \theta_1}{N_2} = \frac{\sin \theta_2}{N_1} = \frac{\sin \theta_1 + \sin \theta_2}{N_1 + N_2} = \frac{\sin \theta_1 - \sin \theta_2}{N_2 - N_1}$$

$$\rightarrow \lg \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = \lg \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{N_2 - N_1}{N_2 + N_1}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{N'_2}{N'_1} \text{ (irreducible).}$$

$$Z_1 = \lambda N'_2$$

$$Z_2 = \lambda N'_1$$

$$2R_1 = Z_1 \frac{M}{\cos \theta_1}$$

$$2R_2 = Z_2 \frac{M}{\cos \theta_2}$$

$$2d = \lambda M \left[\frac{N'_2}{\cos \theta_1} + \frac{N'_1}{\cos \theta_2} \right]$$

Exemple présent:

$$\lg \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = \frac{1}{4} \lg 90^\circ$$

$$\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = 8^\circ 13'$$

$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = 30^\circ$$

$$\theta_1 = 38^\circ 13'$$

$$\theta_2 = 21^\circ 47'$$

$$600 = \lambda \cdot 4 \left[\frac{5}{\cos 38^\circ 13'} + \frac{3}{\cos 21^\circ 47'} \right] \rightarrow \lambda = 15,6 \rightarrow \lambda = 16.$$

$$\text{D'où } Z_1 = 5 \times 16 = 80 \text{ deuts.}$$

$$Z_2 = 3 \times 16 = 48 \text{ deuts.}$$

$2 \times d_{\text{axe}} = 2 \times 307 \text{ mm} \rightarrow d_{\text{axe}} = 307 \text{ mm. en remplaçant à part 1b.}$

Remarque: Si on change le sens des axes, on trouve $Z_1 = 15 \text{ dts}$, $Z_2 = 9 \text{ dts}$
alors, ATTENTION !

Problème II.

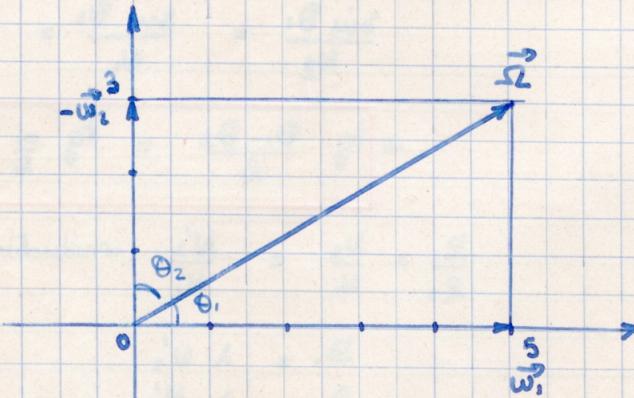
Données : $\frac{N_1}{N_2} = \frac{5}{3}$

$M = 3$

$\alpha = 90^\circ$.

AXES RECTANGULAIRES

$d_{\text{app}} = 250 \text{ mm.}$



Condition fliss! min! $\Rightarrow \tan \theta_1 = \frac{3}{5} = 0,6$

$\Rightarrow \theta_1 = 31^\circ$

$\Rightarrow \theta_2 = 59^\circ$

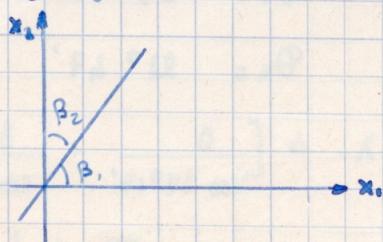
$$\begin{aligned} Z_1 &= 3\lambda \\ Z_2 &= 5\lambda \end{aligned} \quad 2d = Z_1 \frac{M_1}{\cos \theta_1} + Z_2 \frac{M_2}{\cos \theta_2}$$

$$= M\lambda \left[\frac{3}{\cos 31^\circ} + \frac{5}{\cos 59^\circ} \right] \rightarrow \lambda = 13.$$

$Z_1 = 39 \text{ dents}$
 $Z_2 = 65 \text{ dents}$

Problème III.

Calculer les éléments d'un engrenage gauche connaissant la distance des axes, les nb de dents Z_1 et Z_2 , l'angle des axes et M module normal.



$$2R_1 = \frac{M_2}{\cos \beta_1}$$

$$2R_2 = \frac{M_2}{\cos \beta_2}$$

$2d = \frac{M_2}{\cos \beta_1} + \frac{M_2}{\cos \beta_2}$	(1)
$\beta_1 + \beta_2 = d.$	

a) Axes rectangles:

$$\beta_1 + \beta_2 = 90^\circ$$

$$\cos \beta_1 = \sin \beta_2$$

On a : $\frac{A}{\cos x} \rightarrow \frac{B}{\sin x} = C.$

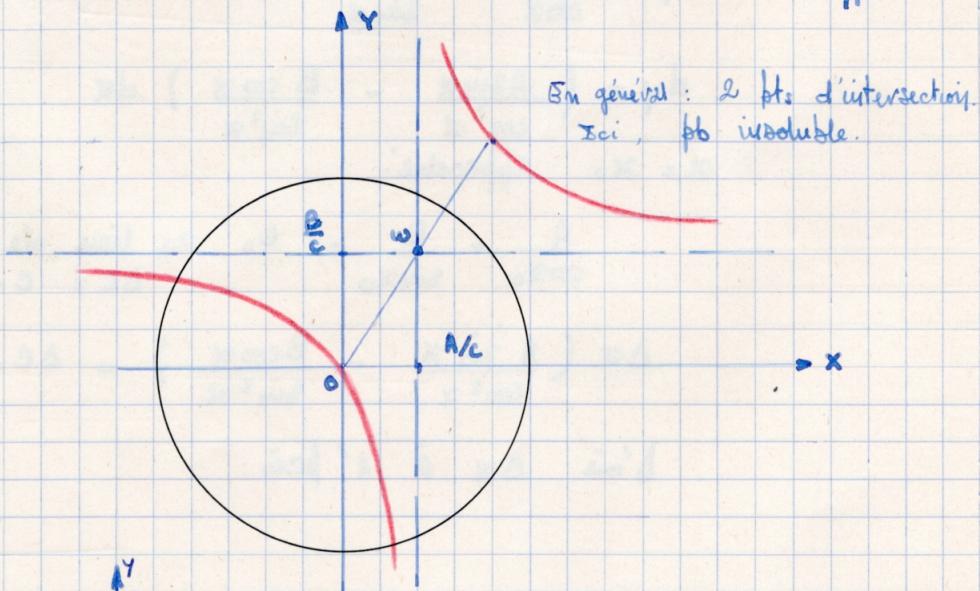
$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \rightarrow \text{équation du 4e degré!}$$

1^o méthode :

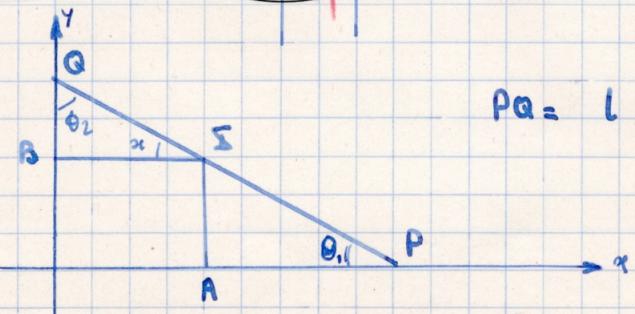
$$\left. \begin{array}{l} \cos x = X \\ \sin x = Y \end{array} \right\} X^2 + Y^2 = 1. \rightarrow \text{ cercle.}$$

$$\frac{A}{X} + \frac{B}{Y} = C \rightarrow \text{ hyperbole.}$$

X et Y \rightarrow intersection du cercle et de l'hyperbole.

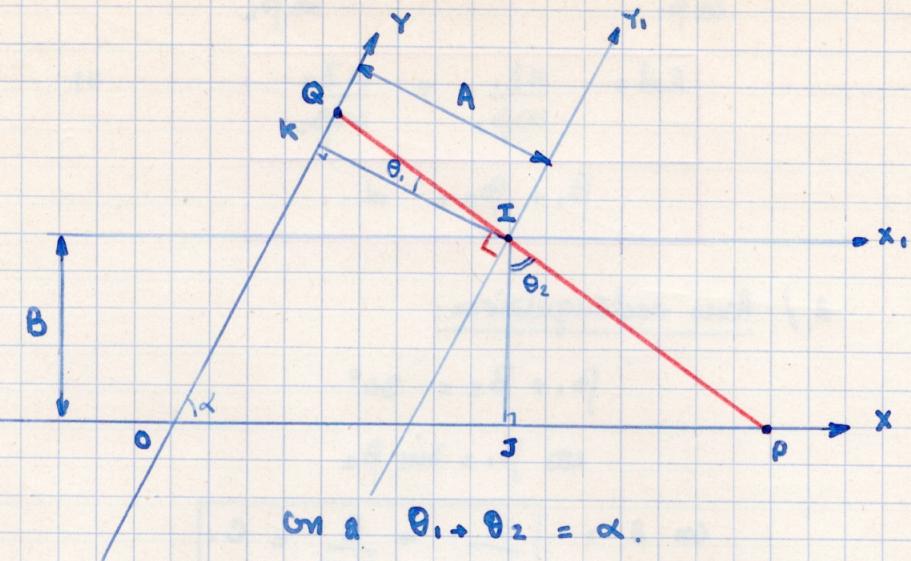


2^o méthode :



$$PQ = l = \text{dist passant par } I.$$

Dans le cas général $\theta_1 + \theta_2 = \alpha$.



$$\text{On a } \theta_1 + \theta_2 = \alpha.$$

$$PI = \frac{B}{\cos \theta_2}$$

$$IQ = \frac{A}{\cos \theta_1}$$

$$PQ = \frac{A}{\cos \theta_1} + \frac{B}{\cos \theta_2} = C$$

On a une précision de l'ordre des degrés.

$$y = \frac{A}{\cos x} + \frac{B}{\sin x}$$

$$dy = \left(\frac{A \sin x}{\cos^2 x} - \frac{B \cos x}{\sin^2 x} \right) dx$$

$x = x_0$ approché.

$$\frac{A}{\cos x_0} + \frac{B}{\sin x_0} = c_0 \text{ au lieu de } c. \quad \Delta c = c - c_0.$$

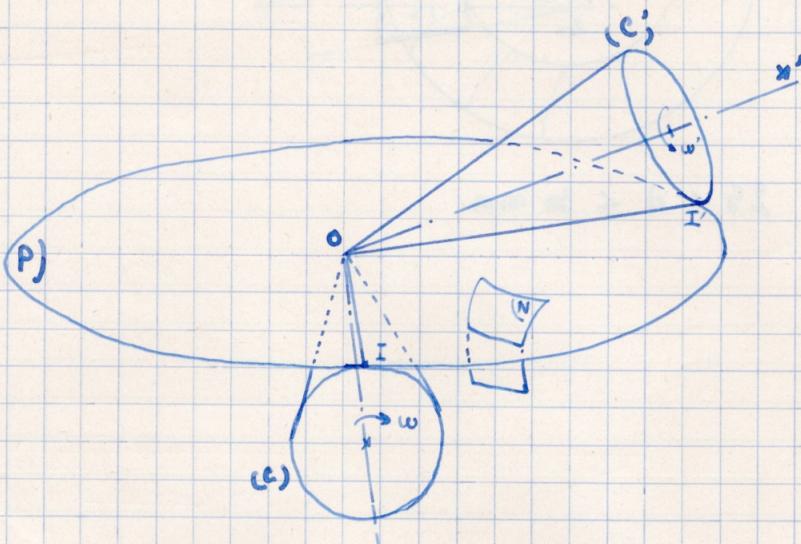
$$\Delta x \left(\frac{A \sin x}{\cos^2 x} - \frac{B \cos x}{\sin^2 x} \right) = \Delta c.$$

D'où Δx à 1' près.

ENGRENAGE HYPOÏDE

Définition:

a/ engrenages coniques.

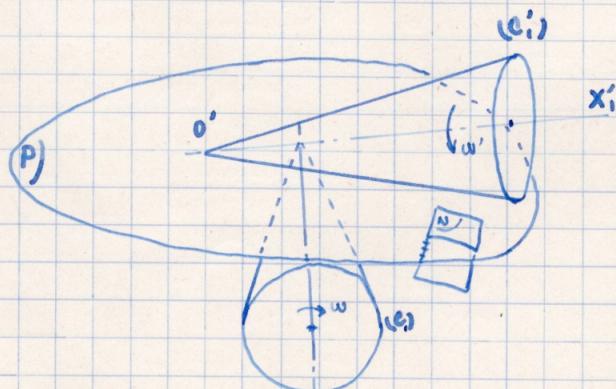


Deux cônes (C) et (C')
roulent sans glisser
sur un plan P . On lie
au plan P une surface
 (N) .

- enveloppe de (N) de (P/c) $\rightarrow (S)$
— (N) de (P/c') $\rightarrow (S')$ } surf. conjuguées.
} contact ponctuel.

b/ engrenages hypoides. \rightarrow Axes non concourants.

Roullement avec glissement.

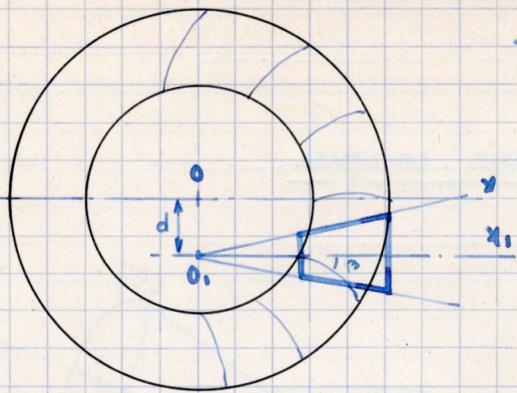


$(P/c) \rightarrow (N)$ env.
 $(P/c') \rightarrow (N')$ "

C : roue conique.
 C' : roue pseudo conique.

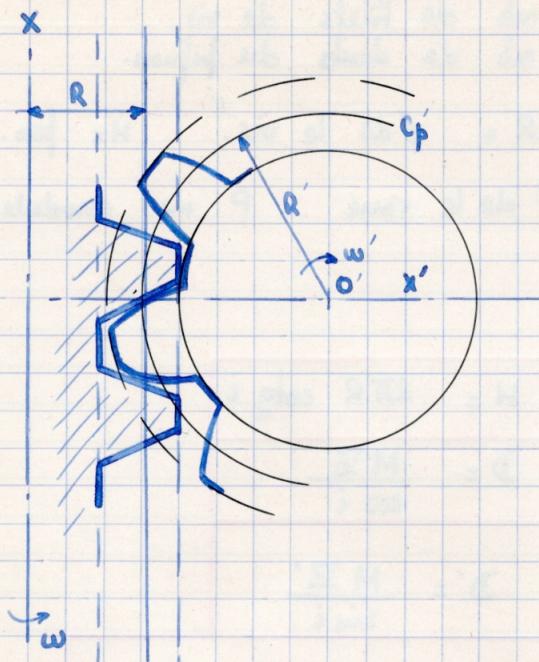
Réalisation sur machine Gleason spéciale.
Application principale aux ponts arrières d'automobiles.

permet un décalage des axes
et une augmentation des dimensions.



$$25 < d < 30 \text{ mm.}$$

ROUE et VIS SANS FIN



Considérons le système pignon-crémaillère à développante et d'épaisseur infiniment mince.

Roue : Z' dents.

$$V = w' R'.$$

Considérons la vis engendrée par la crémaillère dans un mt héliocoidal autour de x.

$$\text{Vis à 1 filet} \rightarrow w = w' Z'$$

$$\text{Vis à 2 filets} \rightarrow wZ = w' Z'$$

$$\boxed{\frac{w}{w'} = \frac{Z}{Z'}}$$

Relation entre R et R' : $2\pi R' = P Z'$.

1 filet.



$$2\pi R \operatorname{cotg} i = H = P$$

$$\operatorname{tg} i = \frac{2\pi R}{H}$$

$$\boxed{\frac{R \operatorname{cotg} i}{R'} = \frac{1}{2'} = \frac{w'}{w}}$$

On réalise la vis et on taille la roue avec une fraise identique à la vis.

Calculs relatifs au système roue et vis sans fin.

Problème I.

Z : nb de filets de vis.

Z' : nb de dents du pignon.

$D = 2R = \phi$ de la vis. $H = \text{pas.}$

$D' = \phi$ de la roue P ou module M .

Formules:

$$\underline{\text{Vis}}: H = MTR \cotg i$$

$$D = \frac{M Z}{\cos i}$$

$$\underline{\text{Pignon}}: D' = \frac{M Z'}{\sin i}$$

$$2d = M \left(\frac{Z}{\cos i} + \frac{Z'}{\sin i} \right).$$

Ex: On donne $M = 5 \text{ mm}$ $Z = 2$ $\frac{w'}{w} = \frac{1}{50}$. $i = 85^\circ$

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{w'}{w} = \frac{1}{50} \rightarrow Z' = 100 \text{ dents.}$$

$$D' = \frac{500}{\sin 85^\circ} = 502,9 \text{ mm.}$$

$$\underline{\text{Vis}}: D = \frac{10}{\cos 85^\circ} = 117,4 \text{ mm}$$

$$H = \pi \frac{10}{\cos i} \cotg i = \frac{10\pi}{\sin i} \approx 31,54 \text{ mm}$$

2^e exemple: Problème II

On a $Z = 5$ filets. $\frac{w'}{w} = \frac{1}{30}$ $M = 5 \text{ mm}$

$$D = 100 \text{ mm.}$$

Trouver i , D' et H .

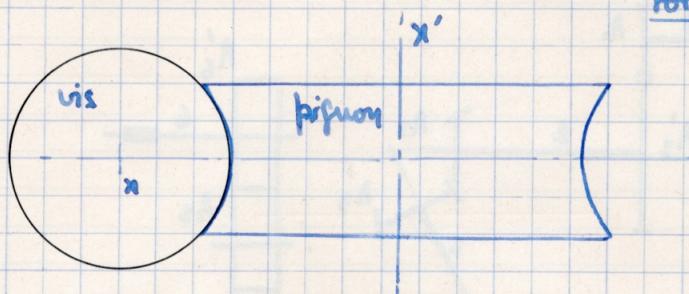
$$\cos i = \frac{M Z}{D} = \frac{25}{100} = 0,25 \rightarrow i = 74^\circ 30'$$

$$H = \pi D \cotg i \rightarrow H = 3,14 \times 100 \times \frac{1}{\sin i} = 87 \text{ mm.}$$

pignon $Z' = 30 Z = 150$ dents.

$$D = \frac{M Z'}{\sin i} = \frac{3000}{\sqrt{3}} = 974 \text{ mm.}$$

Système dérivé : Roue et vis tangentes.

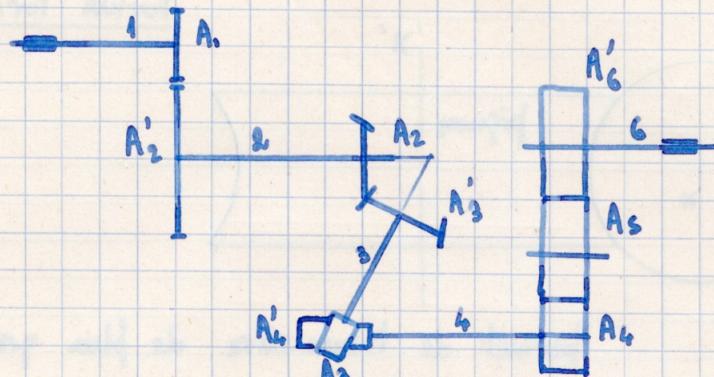


Forme torique.

permet de transmettre de plus grands efforts.

TRAINS de ROUES DENTÉES

Définitions: C'est une suite d'engrenages engrenant les uns dans les autres → transmission de mouvement en changeant v, sens et direction.
Ils peuvent comprendre des engrenages de tous les types.



Les roues qui transmettent le m^t sont dites roues menantes.

Les roues qui reçoivent le m^t sont roues menées.

Les roues menantes et menées à la fois sont dites intermédiaires ou parasites (A₅).

Si tous les axes des arbres de ce train sont fixes → train ordinaire.
Aux axes où certains axes sont mobiles appartiennent les trains épicycloïdaux.

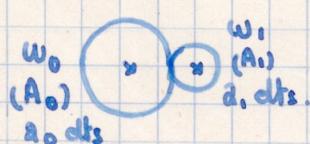
TRAINS ORDINAIRES

I Raisonnement d'un train de roues dentées ordinaires

Définition: la raison d'un train de roues ordinaires est le rapport de la vitesse de rotation de la dernière roue menée à la vitesse de rotation de la première roue menante.

$$k = \frac{\omega_m}{\omega_1} \quad \text{en valeur absolue.}$$

Calcul de la raison:



$$\text{Gn 2 } \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{d_1}{d_0}$$

L'indice ' indique les roues menées.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega_2}{\omega_1} &= \frac{d_1}{d'_2} \\ \frac{\omega_3}{\omega_2} &= \frac{d_2}{d'_3} \\ \frac{\omega_i}{\omega_{i-1}} &= \frac{d_{i-1}}{d'_i} \\ \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} &= \frac{d_{n-1}}{d'_n} \end{aligned} \right\}$$

en multipliant rub à rub :

$$\frac{\omega_n}{\omega_1} = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdots d_{n-1}}{d'_2 \cdot d'_3 \cdots d'_n}$$

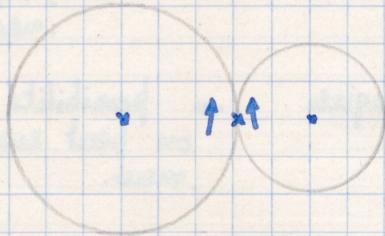
La raison est égale au produit des n^b de dents des roues menantes sur le produit des n^b de dents des roues menées.

Une roue parasite est menée et menante \rightarrow apparaît au numérateur et au dénominateur \rightarrow k nul^{ts} des roues parasites. (elles ne changent que les sens de rotation).

Cas particulier important : Si les axes des roues sont II. Si suffit d'orienter un de ces axes et l'on peut compter les rotations instantanées algéb.

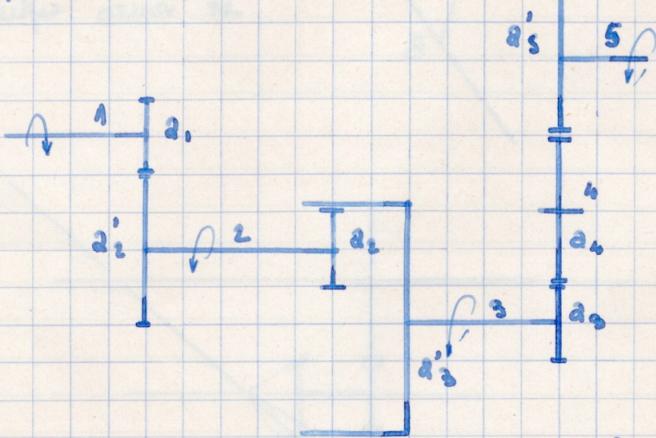
Si contact ext^{ri} \rightarrow sens contraire.
Si contact int^{ri} \rightarrow mêmes sens.

Il y aura autant de changements de sens dans le train que de contacts ext^{ri}.



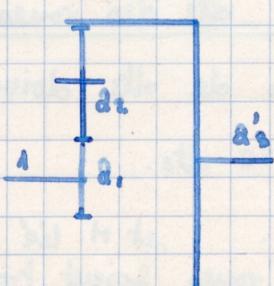
$$k = \frac{\bar{w}_n}{\bar{w}_i} = (-1)^P \begin{matrix} a_1, a_2, \dots \\ a'_1, a'_2, \dots \end{matrix}$$

Exemple :



On a 8 contacts extérieurs. Il faut faire intervenir contacts int^{ri} des roues parasites.

$$k = -(-1)^P \frac{a_1, a_2, \dots}{a'_1, a'_2, \dots} < 0$$



en tenant compte $a_2 \Rightarrow P = 1 \rightarrow k < 0$

sous tenir compte $a_2 \Rightarrow P = 0 \rightarrow k > 0$

II. Problème inverse

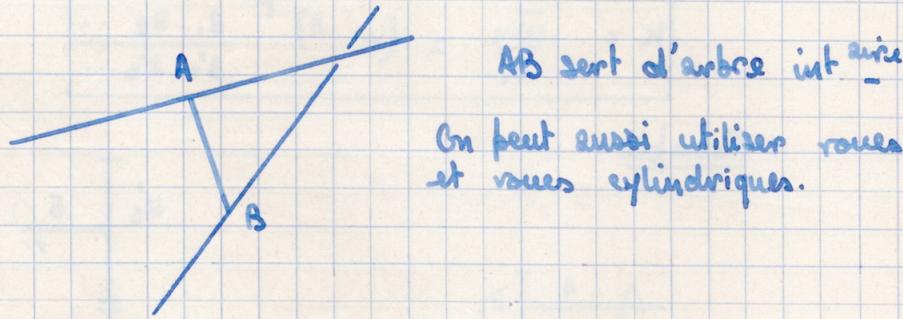
Trouver un train d'engrenage correspondant à une raison i imposée.

Schéma de montage:

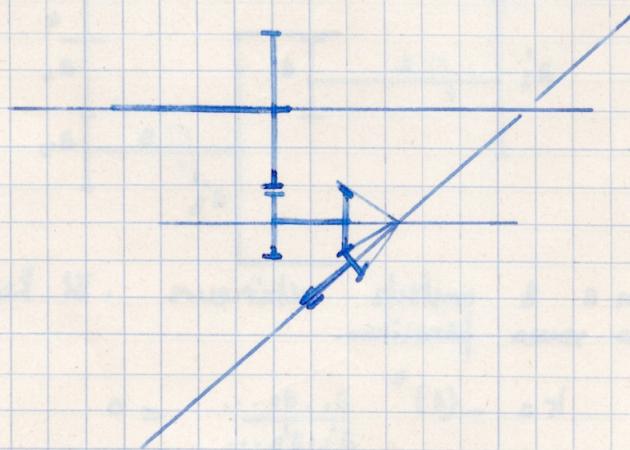
1°/ les axes extrêmes sont \parallel . \rightarrow souvent avantageuse de n'utiliser que des roues cylindriques.

2°/ Les axes sont convergents \rightarrow la + simple des solutions : engrenages coniques avec ou non engrenages intermédiaires.

3°/ Axes quelconques : \rightarrow possibilité de roues gauches, mais on peut aussi utiliser roues coniques uniquement.



On peut aussi utiliser roues coniques et roues cylindriques.



Détermination du nombre de dts des roues du train.

Conditions: les nb de dts doivent être suffisants (interférance)
 $a_i \geq 20$ dts.

$d = 8\text{ M.}$ et i lié au couple à transmettre.
 Il ne faut pas que roues soient trop grandes (encombrement)

$d \leq 120$ dents

Dans certains cas particuliers, les roues doivent être prises dans des assortiments (tour à filer).

Pour question de rendement, on s'impose généralement :

$$\frac{1}{4} \leq \frac{w_i}{w_{i-1}} \leq 2,5.$$

Les nbs de dts devront donc satisfaire à toutes ces conditions.

Exemple: $k = \frac{1}{15}$

On ne peut pas prendre 1 seul couple.

$$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{15} < \frac{1}{4} \rightarrow 2 \text{ couples.}$$

$$k = \frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} = \frac{1}{15} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \rightarrow \frac{1}{3} \text{ ne convient pas.}$$
$$= \frac{4}{3 \times 5} \times \frac{1}{4} \rightarrow \frac{4}{15} \text{ convient.}$$

$$\frac{4}{15} \times \frac{1}{4} = \frac{64}{30} \times \frac{20}{30}.$$

Donc $\begin{matrix} 8 & \rightarrow & 24 \\ 8' & \rightarrow & 30 \end{matrix}$ et $\begin{matrix} 20 & \rightarrow \\ 30 & \rightarrow \end{matrix}$.

Méthode générale: * rendre $k = \frac{p}{q}$ irréductible.

* décomposer p et q en facteurs premiers.

$$k = \frac{p}{q} = \frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e \cdot f}$$

* Rechercher ensuite rapports satisfaisant les cond^{ons} de rendement.

* On peut introduire autres facteurs:

$$k = \frac{abc}{def} \times \frac{g}{g}$$

$$k = \frac{p}{q} = \left(\frac{ab}{d} \right) \left(\frac{g}{e} \right) \left(\frac{c}{fg} \right)$$

* Multiplier num. et dénom. de chaque fraction par nb entier pour que l'on puisse choisir le nb de dts convenable.

Cette méthode ne peut donc convenir lorsque k est incommensurable (Ex : $k = \pi$) ou lorsque l'un des nbs premiers du num. ou du dénom. est trop grand. Il est souvent possible de trouver une fraction approchée.

Exemple: vis à fileter au pas de $(\frac{1}{4})''$
vis mère: P = 10 mm.

$$k = \frac{25,4}{4 \times 10} = \frac{635}{1000} = \frac{127}{200} \rightarrow \text{nb premier}$$

On prend alors $k' = \frac{40}{63}$. Trouver alors le train correspondant.

$$k' = \frac{40}{63} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 5}{3 \times 3 \times 7} = \frac{8}{9} \times \frac{5}{7}$$

$$k' = \frac{80}{90} \times \frac{50}{70} \rightarrow \begin{cases} a = 80 \text{ et } 50 \\ a' = 90 \text{ et } 70 \end{cases}$$

Erreur commise:

$$\frac{p_{\text{exact}}}{10} = \frac{127}{200}$$

$$\frac{p'}{10} = \frac{40}{63}$$

$$\frac{p - p'}{10} = \frac{127}{200} - \frac{40}{63} = 0,635 - 0,63482 \\ = 0,0008$$

$$p - p' = 0,0008 \text{ mm} < 1 \mu.$$

Fractions continues. Réduites

$$\text{On peut écrire } k = a_0 + \frac{1}{k_1} \quad k_1 \geq 1$$

$$k_1 = a_1 + \frac{1}{k_2} \quad k_2 \geq 1.$$

$$k_m = a_m + \frac{1}{k_{m+1}}$$

$$k = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}}}$$

$$\vdots + a_n + \frac{1}{k_{n+1}}$$

C'est développer k en fractions continues. Réduite d'ordre n , c'est la fraction obtenue après la n^{me} opération en supprimant le reste $\frac{1}{k_n}$.

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

$$\vdots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\cancel{k_n}}}$$

Cas particulier intéressant: Si $k = \frac{p}{q}$

$$k = \frac{p}{q} = a_0 + \frac{q_1}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{q_1}}$$

$$q_1 < q.$$

$$k = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{q_1}} \quad q_2 < q_1.$$

$$k = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{q_{n-1}}}}} \quad q_n = q_{n-1}$$

$$q_n < q_{n-1} < \dots < q_2 < q_1 < q.$$

au bout de $n = q$ opérations, la fraction réduite sera égale à la fraction donnée.

1^{ère} Propriété: • les fractions $\frac{P_m}{Q_m}$ forment une suite croissante si m est pair..

2^{ème}

• Elles forment une suite ↘ si m est impair.

3^{ème}

• Les fractions $\frac{P_m}{Q_m}$ tendent vers k lorsque $m \uparrow$

4^{ème}

• L'erreur commise en utilisant réduite d'ordre m au lieu de k est $< \frac{1}{Q_m \cdot Q_{m+1}}$.

5^{ème}

• Si une fraction $\frac{A}{B}$ approche plus de k que la réduite d'ordre m , $\begin{cases} A > P_m \\ B > Q_m \end{cases}$.

Exemple: $\frac{127}{200} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{73}{127}}$

$$= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{54}{73}}}}$$

$$= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{19}{54}}}}}}$$

} 1 ligne de trop!

$$\frac{19}{54} = \frac{1}{\frac{54}{19}} = \frac{1}{2 + \frac{16}{19}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{3}{16}}} \\ = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3}}}}$$

Si on supprime $\frac{1}{3}$, on obtient $\frac{40}{63}$.

$$\text{Erreur} < \frac{1}{63} \times \frac{1}{200} = \frac{1}{12600}.$$

Exemple: $\frac{127}{200} = 0 + \frac{1}{\frac{200}{127}}$

	Reste	a_i
127	200	0
200	127	1
127	93	1
93	54	1
54	19	2
19	16	1
16	3	5
3	1	(2)
(1)	(1)	

Démonstration des théorèmes énoncés

1/ $\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1} \rightarrow P_0 = a_0 \quad Q_0 = 1$

$$\frac{P_1}{Q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} \rightarrow P_1 = a_0 a_1 + 1, \quad Q_1 = a_1.$$

$$P_1 = a_1 P_0 + 1, \quad Q_1 = a_1 Q_0 + 0$$

$$\begin{aligned} \frac{P_2}{Q_2} &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} \\ &= \frac{a_2 (a_0 a_1 + 1) + a_0}{a_1 a_2 + 1} \end{aligned}$$

$$\rightarrow P_2 = a_2 P_1 + P_0 \\ Q_2 = a_2 Q_1 + Q_0$$

Admettons que la loi est vraie jusqu'à l'ordre m .

$$P_m = a_m P_{m-1} + P_{m-2}$$

$$Q_m = a_m Q_{m-1} + Q_{m-2}$$

Démontrons qu'elle est encore vraie pour $m+1$:

On remplace ds réd. ordres m : a_m par $(a_m + \frac{1}{a_{m+1}})$

$$\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} = \frac{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) P_{m-1} + P_{m-2}}{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) Q_{m-1} + Q_{m-2}}$$

$$= \frac{a_m \cdot a_{m+1} \cdot P_{m-1} + P_{m-1} + a_{m+1} \cdot P_{m-2}}{a_m \cdot a_{m+1} \cdot Q_{m-1} + Q_{m-1} + a_{m+1} \cdot Q_{m-2}}$$

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{d_{n+1} (d_n P_{n-1} + P_{n-2}) + P_{n-1}}{d_{n+1} (d_n Q_{n-1} + Q_{n-2}) + Q_{n-1}}$$

Comme on a admis que la relation était vraie pour $n, n-1$:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{d_{n+1} \cdot P_n + P_{n-1}}{d_{n+1} \cdot Q_n + Q_{n-1}}$$

$$(1) \quad \begin{aligned} P_n &= d_n \cdot P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n &= d_n \cdot Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} P_0 = a_0 \\ Q_0 = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1 = a_0 a_1 + 1 \\ Q_1 = a_1 \end{array} \right.$$

Loi de récurrence.

Utilisation pratique de la loi de récurrence.

	(0)	(1)	(2)	...	(n)			
a_i		a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
P_i		$1 \xrightarrow{+} a_0$	$a_0 \xrightarrow{+} a_1$	$a_0 a_1 + 1$		\dots	$P_{n-2} \xrightarrow{+} P_{n-1}$	P_n
Q_i	$0 \xrightarrow{+} 1$		a_1				$Q_{n-2} \xrightarrow{+} Q_{n-1}$	Q_n

	a_0	a_1	a_2	\dots
1	a_0			
0	1			

Cherchons une relation entre les réduites d'ordres $n, n-1, n-2$.

$$\frac{P_n - P_{n-2}}{Q_n - Q_{n-2}} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

$$P_n \cdot Q_{n-1} - P_{n-2} \cdot Q_{n-1} = Q_n \cdot P_{n-1} - P_{n-1} \cdot Q_{n-2}$$

$$P_n \cdot Q_{n-1} - Q_n \cdot P_{n-1} = -(P_{n-1} \cdot Q_{n-2} - P_{n-2} \cdot Q_{n-1})$$

$$\text{si } n=1 \Rightarrow P_1 Q_0 - P_0 Q_1 = a_0 a_1 + 1 - a_0 a_1 = 1$$

Si $n=1$
 $n=2$

$$\begin{aligned} P_1 Q_0 - P_0 Q_1 &= 1 \\ P_2 Q_1 - P_1 Q_2 &= -1. \end{aligned}$$

$$P_m \cdot Q_{m+1} - P_{m+1} \cdot Q_m = (-1)^{m+1} \quad (2)$$

$$\frac{P_m}{Q_m} - \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} = \frac{(-1)^{m+1}}{Q_m \cdot Q_{m+1}} \quad (3)$$

$$\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} - \frac{P_{m+2}}{Q_{m+2}} = \frac{(-1)^{m+2}}{Q_{m+1} \cdot Q_{m+2}}$$

$$\frac{P_m}{Q_m} - \frac{P_{m+2}}{Q_{m+2}} = \frac{(-1)^{m+2}}{Q_{m+1}} \left[\frac{1}{Q_{m+2}} - \frac{1}{Q_m} \right]$$

$$Q_n > Q_{n-1} > Q_{n-2} > \dots > Q_0$$

$$P_n > P_{n-1} > P_{n-2} > \dots > P_0$$

$$\bullet n \text{ pair} \rightarrow (-1)^{m+2} = 1$$

$$\frac{P_m}{Q_m} > \frac{P_{m+2}}{Q_{m+2}}.$$

Si les réduites sont paire, elles forment une suite croissante

$$\bullet n \text{ impair} \rightarrow (-1)^{m+2} < 0.$$

$$\frac{P_m}{Q_m} < \frac{P_{m+2}}{Q_{m+2}}$$

Elles forment une suite décroissante.

$$1/. \quad n \text{ pair} : \quad \frac{P_m}{Q_m} - \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} < 0$$

$$\frac{P_m}{Q_m} < \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} < \frac{P_{m+3}}{Q_{m+3}} < \dots < \frac{P_1}{Q_1}$$

une réduite d'ordre m_f qq (sauf $n=0$) est inférieure à $\frac{P_1}{Q_1}$.

La suite $\frac{P_m}{Q_m}$ (n pair) est bornée et tend vers une limite k_0 .

La suite $\frac{P_m}{Q_m}$ (n impair) " " " " " " " " k_1 .

$$\left| \frac{P_m}{Q_m} - \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} \right| \rightarrow 0 \quad \text{puisque } Q_m \text{ est une suite } \geq 0 \text{ croissante.}$$

Donc $|k_0 - k_1| \rightarrow 0 \rightarrow k_0 = k_1$

montrons que $k_0 = k_1 = k$ nb développé en fraction continue.

$$k = \frac{\left(a_m + \frac{1}{k_{m+1}} \right) P_{m-1} + P_{m-2}}{\left(a_m + \frac{1}{k_{m+1}} \right) Q_{m-1} + Q_{m-2}} = \frac{P}{Q}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \alpha P_{m-1} + P_{m-2} \\ Q = \alpha Q_{m-1} + Q_{m-2} \end{array} \right.$$

$$\frac{P - P_{m-2}}{Q - Q_{m-2}} = \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}$$

$$P \cdot Q_{m-1} - P_{m-2} \cdot Q_{m-1} = Q \cdot P_{m-1} - P_{m-1} \cdot Q_{m-2}$$

$$P \cdot Q_{m-1} - Q \cdot P_{m-1} = P_{m-2} \cdot Q_{m-1} - P_{m-1} \cdot Q_{m-2}$$

$$= -(P_{m-1} \cdot Q_{m-2} - P_{m-2} \cdot Q_{m-1}) \\ = -(-1)^{m-2} = (-1)^{m-1}.$$

$$P \cdot Q_{m-1} - Q \cdot P_{m-1} = (-1)^{m-1}.$$

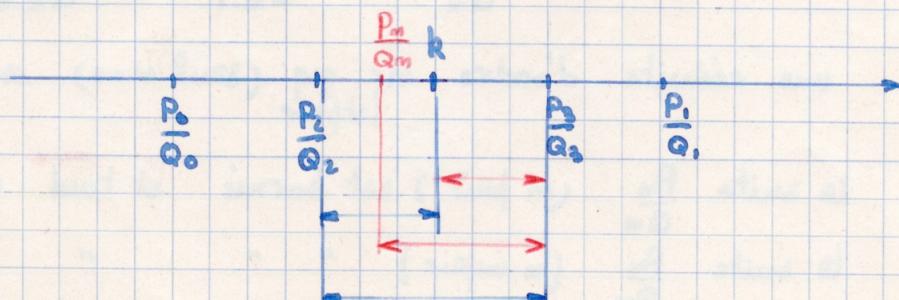
$$\frac{P}{Q} - \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} = \frac{(-1)^{m-1}}{Q \cdot Q_{m-1}}$$

$$k - \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} = \frac{(-1)^{m-1}}{Q \cdot Q_{m-1}}$$

$$\left| k - \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right| \downarrow 0 \quad k_0 = k_1.$$

Donc $k = k_0 = k_1$.

(M-1) pair $k >$ à toute réduction paire.
(n-1) impair $k <$ " " impaire.



$$\text{Erreur: } \left| k - \frac{P_m}{Q_m} \right| < \left| \frac{P_m}{Q_m} - \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} \right| = \frac{1}{Q_m \cdot Q_{m+1}} < \frac{1}{Q_m^2}$$

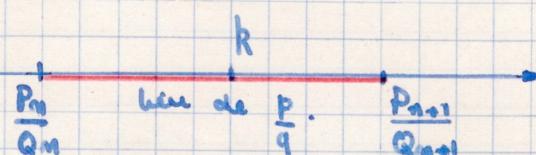
3) Montrer que si $\left| \frac{p}{q} - k \right| < \left| k - \frac{p_m}{q_m} \right|$, on a nécessairement $p > p_m$ et $q > q_m$

1^{er} cas : $\frac{p}{q} = \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$ irréductible car d'après (2) p_m et q_m n'ont pas de facteurs communs.

$$p = p_{m+1} > p_m$$

$$q = q_{m+1} > q_m. \rightarrow \text{Th démontré.}$$

2nd cas : $\frac{p}{q}$ compris entre $\frac{p_m}{q_m}$ et $\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$.
m pair :



$$q \cdot p_m < p \cdot q_m$$

$$\frac{p \cdot q_m}{q \cdot p_m} < \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$$

$$p \cdot q_m \cdot q_{m+1} < q \cdot p_m \cdot p_{m+1}$$

$$p \cdot q_m \cdot q_{m+1} < q [p_m \cdot q_{m+1} + 1] \text{ car } m \text{ est pair.}$$

$$q_{m+1} [p \cdot q_m - q \cdot p_m] < q.$$

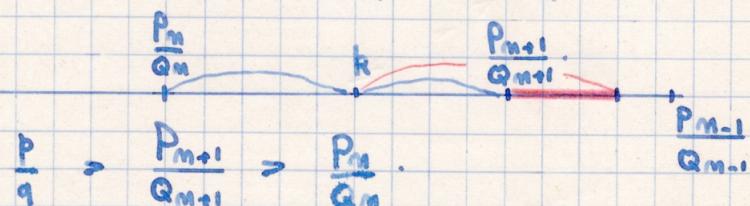
Or $p > q$
donc $q > q_{m+1} > q_m$.

$$p > q \cdot \frac{p_m}{q_m} \text{ mais } \frac{q}{q_m} > 1.$$

$$p > p_m. \rightarrow \text{Th démontré.}$$

démonstration identique si m est impair.

3^e cas : on suppose toujours m pair.



$$\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} < \frac{p}{q} < \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}$$

$$\frac{P_n}{Q_m}$$

$$\frac{p}{q}$$

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{m-1}}$$

$$\rightarrow q > Q_m > Q_{m-1}$$

$$\rightarrow p > P_m.$$

démonstration \equiv si m impair. . CQFD.